

## 5 Pravdepodobnosť, kombinatorika, štatistika

### Kombinačné číslo, Pascalov trojuholník

Vysvetlite pojem kombinačného čísla a zapíšte vzťah pre výpočet kombinačného čísla. Uvedte základné vlastnosti kombinačných čísel a demonštrujte ich na Pascalovom trojuholníku.

**Kombinačné číslo** je číslo číslo  $\binom{n}{k}$  pre ktoré platí  $n \geq k$  a  $n, k$  patria do kladných prirodzených čísel

$$C(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Kombinačné číslo určuje počet všetkých kombinácií **k – tej** triedy vytvorených z prvkov **n** prvkovej množiny.

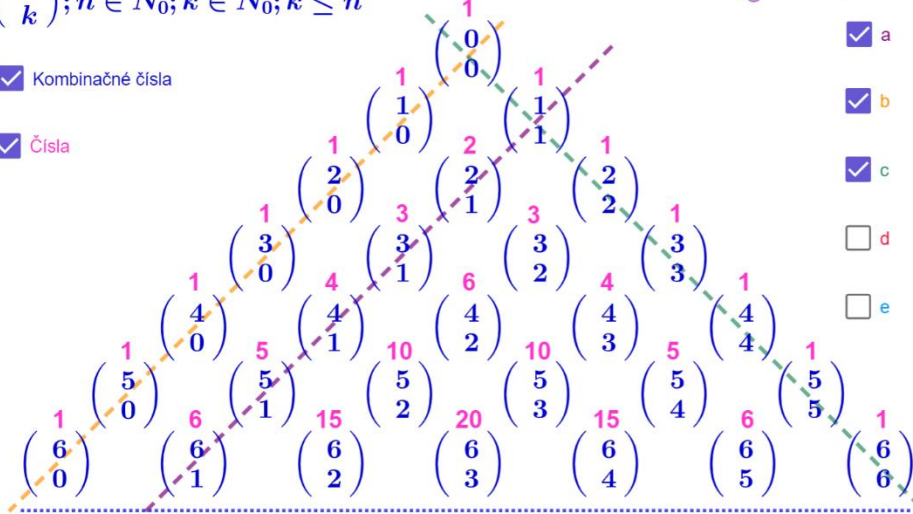
V Pascalovom trojuholníku sledujte vlastnosti kombinačných čísel

$$\binom{n}{k}; n \in \mathbb{N}_0; k \in \mathbb{N}_0; k \leq n$$

n = 6

Kombinačné čísla

Čísla



Vlastnosti:

a  $\binom{n}{1} = n$

b  $\binom{n}{0} = 1$

c  $\binom{n}{n} = 1$

d

e

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

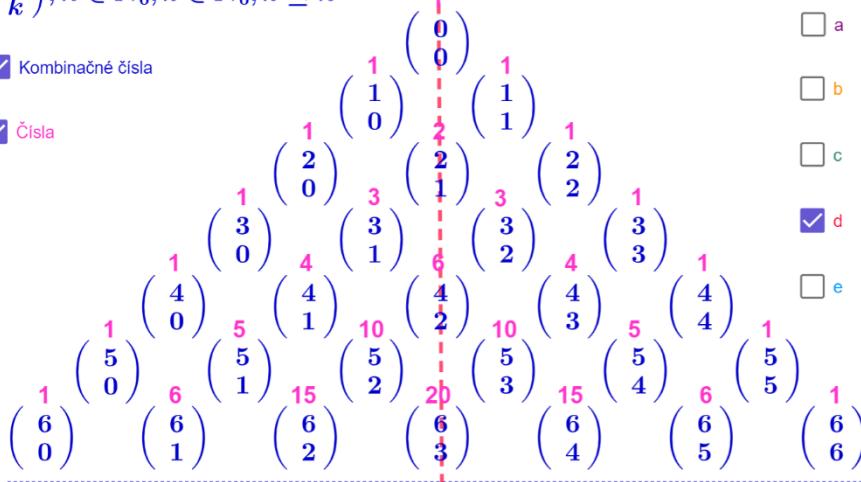
V Pascalovom trojuholníku sledujte vlastnosti kombinačných čísel

$$\binom{n}{k}; n \in \mathbb{N}_0; k \in \mathbb{N}_0; k \leq n$$

n = 6

Kombinačné čísla

Čísla



Vlastnosti:

a

b

c

d  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

e

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$pr. \binom{20}{3} = \binom{20}{17}$$

V Pascalovom trojuholníku sledujte vlastnosti kombinačných čísel

$$\binom{n}{k}; n \in N_0; k \in N_0; k \leq n$$

Kombinačné čísla

Čísla

n = 6

Vlastnosti:

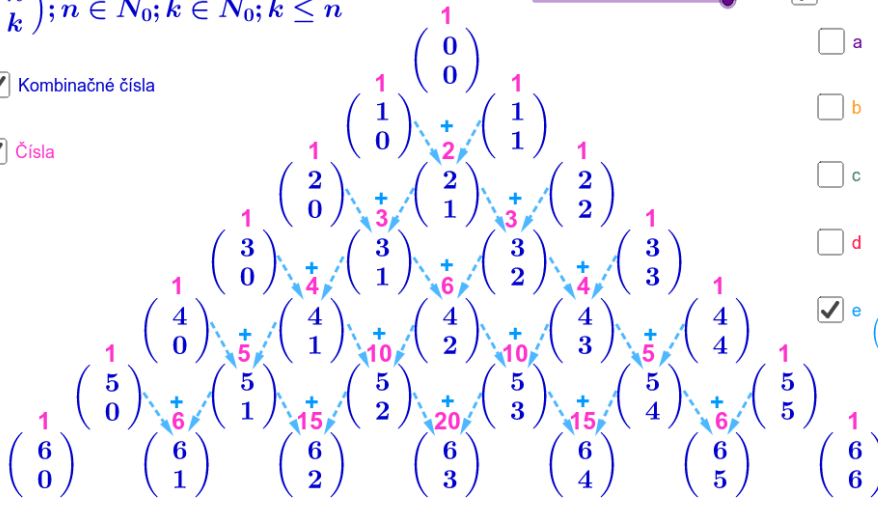
a

b

c

d

e  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$



$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \binom{n+1}{k+1} \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

## Variácie, permutácie, kombinácie

Vysvetlite pojmy: variácie, permutácie, kombinácie bez opakovania. Uveďte základné vzťahy pre výpočet počtu prvkov týchto množín. Vysvetlite pojem  $n!$ .

**Variácia**  $k$  – tej triedy  $n$  – prvkovej množiny  $M$  je ľubovoľná usporiadaná  $k$  – tica vytvorená z prvkov tejto množiny tak, že každý prvok sa v danej  $k$  – tici môže vyskytnúť najviac raz.  $n, k$  patria do celých nezaporných čísel a platí že  $n \geq k$ .

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

**Variácie s opakovaním**  $k$  – tej triedy  $n$  – prvkovej množiny  $M$  je ľubovoľná usporiadaná  $k$  – tica vytvorená z prvkov tejto množiny tak, že každý prvok sa v danej  $k$  – tici môže vyskytnúť najviac  $k$  – krat. Čísla  $n, k$  sú celé nezaporné.

$$V'(k, n) = n^k$$

**Permutácia**  $n$  – prvkovej množiny  $M$  je ľubovoľná usporiadaná  $n$  – tica prvkov tejto množiny, v ktorej je každý prvok množiny  $M$  práve raz

$$P(n) = n!$$

**Permutácie s opakovaním** ak nám vzniknú rovnaké  $k$  – tiny tak použijeme permutácie s opakovaním aby sa tieto možnosti vymedzili na max 1.

$$P'(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

**Kombinácia bez opakovania**  $k$  – tej triedy  $n$  – prvkovej množiny  $M$  je ľubovoľná  $k$  prvková podmnožina vytvorená z prvkov množiny  $M$  tak, že každý prvok sa v danej kombinácii môže vyskytnúť najviac raz. Čísla  $n, k$  sú celé nezaporné.

$$C(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

**Faktoriál** – faktoriál čísla  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  je súčin všetkých prirodzených čísel menších alebo rovných  $n$ . Zapisuje sa  $n!$  a číta sa „ $n$  faktoriál“. Napríklad  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

## Štatistické ukazovatele

Vysvetlite pojmy: štatistický súbor, rozsah štatistického súboru, štatistický znak. Vysvetlite pojmy modus, medián, aritmetický priemer (aj viac ako dvoch čísel) stredná hodnota, smerodajná odchýlka, rozptyl.

**Štatistický súbor** je súbor štatistických jednotiek so spoločnou vlastnosťou, neprázdna konečná množina M objektov štatistického skúmania.

**Štatistická jednotka** (základná sledovaná jednotka, ktorej sa týkajú štatistické údaje) Subjekt, o ktorom sa získavajú informácie, z ktorých sa v konečnom dôsledku zostavuje štatistika.

**Štatistický znak** je spoločná vlastnosť štatistických jednotiek v štatistickom súbore. Je predmetom štatistického skúmania. Každý prvok má štatistickému znaku priradenú hodnotu znaku.

**Rozsah štatistické súboru** ( $n$ ) je počet prvkov množiny M.

**Modus** alebo modálna hodnota alebo najpravdepodobnejšia hodnota je tá hodnota kvantitatívneho znaku štatistického súboru, ktorá má najvyššiu relatívnu frekvenciu, teda sa vyskytuje najčastejšie

**Medián** alebo stredná hodnota (znaku) alebo centrálna hodnota (znaku) (označuje sa  $Med(x)$ ) je hodnota, ktorá rozdeľuje postupnosť podľa veľkosti usporiadaných výsledkov na dve rovnako početné polovice. V štatistike patrí medzi stredné hodnoty. Platí, že najmenej 50 % hodnôt je nižších alebo sa rovná mediánu a najmenej 50 % hodnôt je vyšších alebo sa rovná mediánu.

**Aritmetický priemer** je súčtom hodnôt skupiny čísel vydelených počtom čísel v skupine.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

**Stredná hodnota** je jednoduchá číselná charakteristika slúžiaca na meranie úrovne (polohy) štatistického rozdelenia hodnôt, pomocou ktorej možno nahradiť a zovšeobecniť hodnoty štatistického súboru. Počíta sa z absolútnych alebo z pomerných čísel.

Delí sa na dva druhy:

stredná hodnota počítaná zo všetkých jednotiek štatistického súboru (tzv. priemery)

stredná hodnota počítaná len z vybraných jednotiek štatistického súboru (napríklad medián, modus)

**Rozptyl** = rozptyl hodnôt znaku  $x$ , kt. má  $n$  hodnôt je daný vzťahom:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

**Smerodajná odchýlka** = druhá odmocnina z rozptylu

## Pravdepodobnosť javu (udalosti)

Charakterizujte pojmy: pravdepodobnosť javu, doplnková pravdepodobnosť javu, náhodný jav, priaznivý, nepriaznivý jav. Uvedte vzťahy pre výpočet pravdepodobnosti javu, vzťah pre pravdepodobnosť doplnkového javu a nezávislých javov.

**Pravdepodobnosť javu A** je podiel sledovaných možností ku všetkým možnostiam. (určená v percentách alebo v intervale  $\langle 0,1 \rangle$ )

**Doplnková pravdepodobnosť javu A'** sú všetky možnosti, ktoré neobsahuje pravdepodobnosť A

$$P(A) + P(A') = 1 \qquad P(A') = 1 - P(A)$$

**Náhodný jav** je výsledok náhodného pokusu, o ktorom je možné po vykonaní pokusu rozhodnúť, či nastal alebo nenastal.

**Priaznivý/Nepriaznivý jav** = Ak náhodný jav A nastáva pri danom výsledku náhodného pokusu, hovoríme, že tento výsledok je priaznivý náhodnému javu A, ak nie tak je nepriaznivý.

$$P(A) = \frac{n}{m} \quad (n = \text{priaznivé možnosti}, m = \text{všetky možnosti})$$

**Nezávisle javy** :  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Zlučiteľne javy** :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Nezlučiteľne javy** :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

## Pravdepodobnosť javu (udalosti)

Vysvetlite pojmy: náhodný pokus, náhodný jav, istý jav, nemožný jav. Z akého intervalu nadobúdajú hodnoty pravdepodobnosti týchto javov hodnoty? Ako určíme pravdepodobnosť prieniku dvoch nezávislých javov a pravdepodobnosť zjednotenia dvoch javov?

**Náhodný pokus** je taký pokus, ktorý môžeme donekonečna opakovať a jeho výsledok nebude určený vonkajšími javmi a jeho výsledky budú rôzne.

**Náhodný jav** je jav, ktorý ma pravdepodobnosť nastania medzi 0% až 100%, čiže pravdepodobnosť je v intervale (0,1)

**Istý jav** je jav, ktorý vieme že sa s istotu stane a jeho pravdepodobnosť je  $P(A) = 1$

**Nemožný jav** je jav, ktorý nikdy nenastane a jeho pravdepodobnosť je  $P(A) = 0$

### Pravdepodobnosť prieniku dvoch nezávislých javov:

**Nezávislé javy:** o dvoch javoch hovoríme, že sú nezávislé, ak uskutočnenie jedného javu nemá vplyv na uskutočnenie či neuskutočnenie druhého javu. Hovoríme, že javy A a B sú nezávislé, ak

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

### Pravdepodobnosť zjednotenia dvoch javov:

**Sčítanie pravdepodobností:** nech sa javy A a B navzájom vylučujú. Pravdepodobnosť zjednotenia dvoch navzájom vylučujúcich sa javov  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .