4 STEREOMETRIA

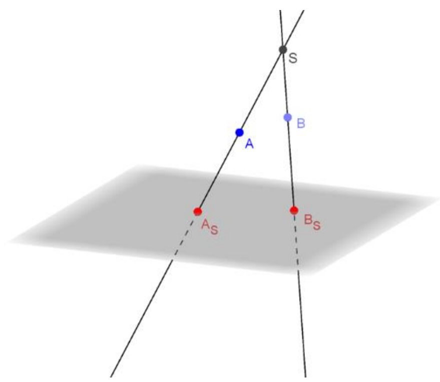
Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny

Vysvetlite obsah pojmov priestor, priemet bodu a priestorového útvaru do roviny, pravidlá voľného rovnobežného premietania. Použiť vlastnosti voľného rovnobežného premietania pri zobrazení kocky, pravidelného 4-bokého hranola a pravidelného 4-bokého ihlana.

Priestor je geometrický útvar, ktorého rozmer sa rovná priestoru, v ktorom sa nachádza. V prípade trojrozmerného priestoru má teda rozmer rovný 3. Priestor môže obsahovať lineárne, rovinné alebo priestorové útvary, teda geometrické útvary s rozmerom nižším alebo rovným ako je rozmer daného priestoru.

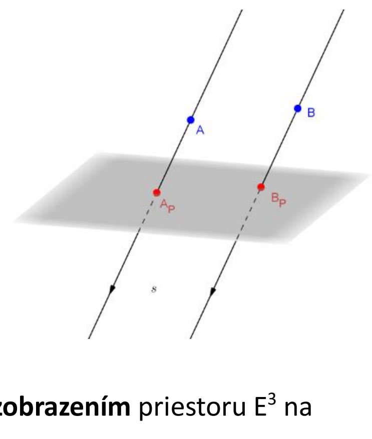
Priemet bodu a priestorového útvaru do roviny: **Priemet =** Špeciálne zobrazenie priestoru na zvolenú rovinu – nákresňu.

Stredové premietanie



- Zvolený je pevný bod $S \in E^3$ (**stred premietania**), ktorý neleží v **nákresni** - **zvolenej rovine π** (priemetňa).
- Obrazom každého bodu $A \in E^3$, $A \neq S$ je bod $A_S \in \pi$, ktorý je priesečníkom **premietacej priamky AS** prechádzajúcej bodom A a stredom premietania S s **priemetňou**, $A_S = SA \cap \pi$.
- Vzdialenosť stredu premietania od priemetne nazývame **dištancia**, $|S\pi| = d$.
- Stred premietania nemá priradený obraz - priemet.
- Stredové premietanie nezachováva rovnobežnosť, ani deliaci pomer bodov na priamke.

Rovnobežné premietanie



- Daný je **smer premietania s**, osnova rovnobežných priamok **priestoru E³**, ktorý **nie je rovnobežný s nákresňou** - zvolenou rovinou π (priemetňa).
- Obrazom ľubovoľného bodu $A \in E^3$ je bod $A_P \in \pi$, ktorý je priesečníkom premietacej priamky s^A, $A \in s^A$ zo smeru s prechádzajúcej bodom A s priemetňou, $A_P = s^A \cap \pi$.

- Stredové ani rovnobežné premietanie **nie je jednoznačným zobrazením** priestoru E^3 na rovinu.
- **Všetky body každej premietacej priamky** sa zobrazia do toho istého bodu, priesečníka s priemetňou.
- Všetky body priemetne sú pri oboch premietaniach **samodružné**.

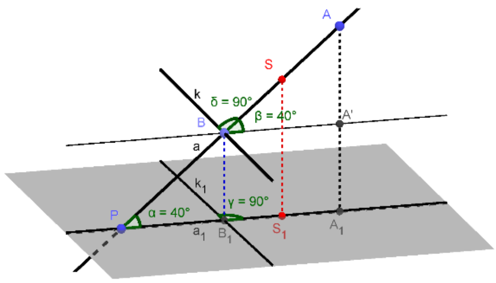
- **Priemetom geometrického útvaru** je útvar, ktorý získame ako množinu priemetov všetkých jeho bodov.
- **Priemetom priamky, ktorá nie je premietacou priamkou**, je priamka.
- **Priemetom premietacej priamky je bod.**
- **Množina všetkých premietacích priamok bodov jednej priamky** vytvára premietaciu rovinu priamky.
- **Priemet priamky** je priesečnica premietacej roviny priamky s priemetňou.
- **Priemetom roviny, ktorá nie je premietacou rovinou**, je celá priemetňa.
- **Priemetom premietacej roviny je priamka.**

Vlastnosti rovnobežného premietania:

1. Priemetom útvaru U, ktorý leží v rovine rovnobežnej s priemetňou, je útvar zhodný s útvarom U.

2. Rovnobežnosť je invariantom rovnobežného premietania. Rovnobežné priamky nepatriace smeru premietania majú rovnobežné priemety.

3. Zachováva sa deliaci pomer bodov na priamke, λ (ABS) = λ (A1 B1 S1). Stred útvaru sa premieta do stredu priemetu útvaru.



Kolmé premietanie je také rovnobežné premietanie, pri ktorom sú všetky premietacie priamky smeru s kolmé na priemetňu. Okrem vlastností rovnobežného premietania 1. - 3. platia ešte niektoré ďalšie.

4. Nech AB je úsečka na priamke a, ktorá zviera s priemetňou π uhol α . Pre kolmý priemet A1B1 platí | A1 B1 | = | AB | cos α

Dĺžka kolmého priemetu úsečky je menšia (pre α ∈ (0°, 90°), pre α = 90° je A1 = B1), alebo sa rovná (pre α = 0°) dĺžke danej úsečky AB.

5. Pravý uhol sa premieta ako pravý, ak je aspoň jedno jeho rameno rovnobežné s priemetňou a ani jedno nie je kolmé na priemetňu.

Pravidlá voľného rovnobežného premietania sú:

1. Hrany prednej strany rysujeme podľa skutočných rozmerov a uhlov (takže aj zadnú)
2. Bočné hrany rysujeme pod uhlom 45 stupňov a ich dĺžku skrátime o polovicu
3. Hrany ktoré nevidíme (z nášho uhlu pohľadu) rysujeme prerušovanou čiarou

Sústava súradníc v priestore

Vysvetlite obsah pojmov sústava súradníc v priestore, bod a jeho súradnice. Zvoľte si dva body v priestore, vypočítajte ich vzdialenosť a súradnice stredu úsečky. Umiestnite do vhodnej SS v priestore kváder s rozmermi a=4, b=3, c=6 a napíšte súradnice všetkých jeho vrcholov.

Sústava súradníc v priestore pozostáva z troch navzájom si kolmých priamok, ktoré nazývame osi, s rovnakou mierkou (dĺžka, výška, hĺbka). Sústava súradníc sa nazýva aj karteziánska, podľa zakladateľa analytickej geometrie Reného Descartesa.

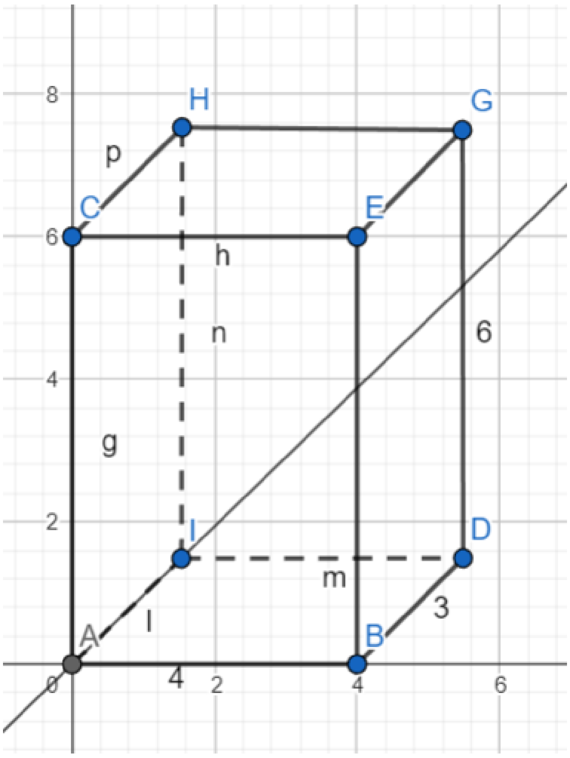
Bod a jeho súradnice: Bod zakreslený v sústave súradníc v priestore má tri súradnice ako usporiadanú trojicu čísel, napríklad A[a_1; a_2; a_3].

Zvoľte si dva body v priestore, vypočítajte ich vzdialenosť a súradnice stredu úsečky:

Vzdialenosť: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Stredový bod: $S[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}; \frac{a_3+b_3}{2}]$

Umiestnite do vhodnej SS v priestore kváder s rozmermi a=4, b=3, c=6 a napíšte súradnice všetkých jeho vrcholov:



A[0,0,0]

B[4,0,0]

C[0,6,0]

D[4,0,3]

E[4,6,0]

I[0,0,3]

H[0,6,3]

G[4,6,3]

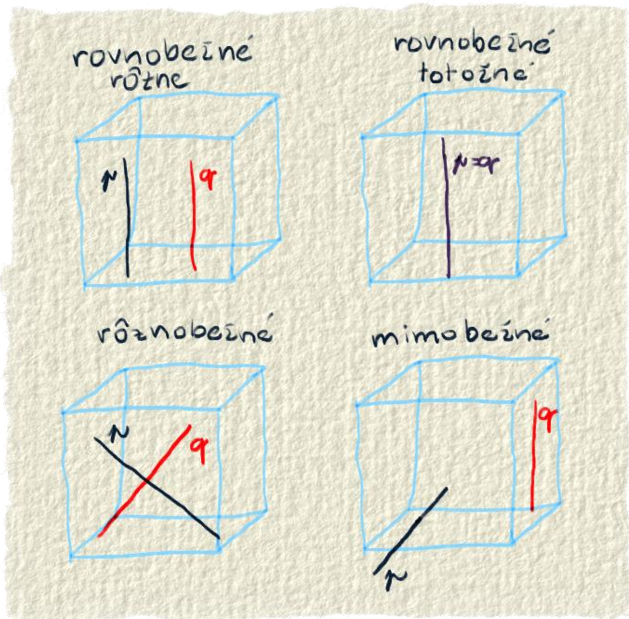
Lineárne útvary v priestore – polohové úlohy

Vysvetlite obsah pojmov bod, priamka a rovina v priestore, rovnobežné, rôznobežné a mimobežné priamky, rovnobežné a rôznobežné priamky a roviny, rovnobežné a rôznobežné roviny, priesečnica 2 rovín. Zvoľte si tri ľubovoľné body v priestore a vysvetlite pojmy na konkrétnom príklade. (rovnobežnosť rovín sa ale bude musieť znazorniť asi cez min 4 Body…)

Bod je bezrozmerný základný geometrický útvar. Graficky sa bod znázorňuje krížikom, označuje sa veľkým tlačeným písmenom.

Priamka je nekonečne tenká, nekonečne dlhá, dokonale rovná čiara (rovná krivka). Vieme ju zapísať cez dva body alebo cez jeden bod a vektor. Označujeme ju malým pisaným písmenom.

Rovina je nekonečne tenká, je nekonečne široká a dlhá plocha určená troma bodmi alebo priamkou a jedným bodom ležiacim mimo priamky alebo dvoma priamkami, dvoma vektormi atď… Označuje sa gréckymi písmenami.



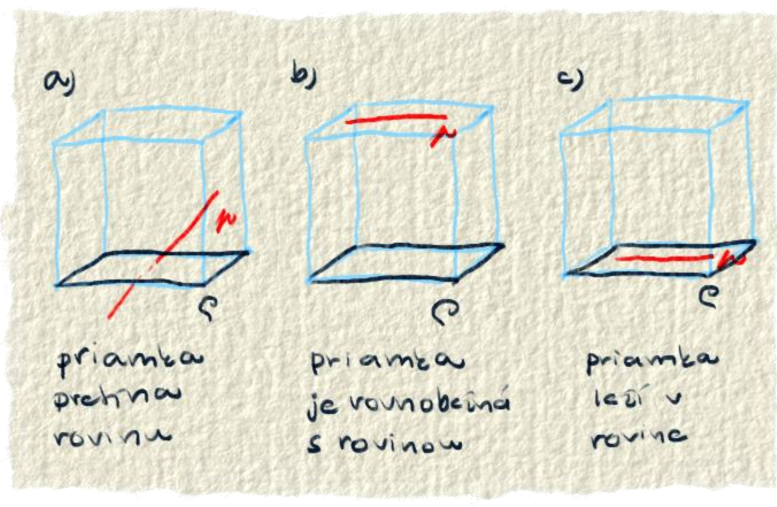
Rovnobežné priamky sú priamky, ktoré ležia na jednej rovine a nemajú ani jeden spoločný bod (totožné priamky maju všetky body rovnaké).

Rôznobežné priamky sú priamky, ktoré ležia na jednej rovine a majú jeden bod spoločný.

Mimobežné priamky sú priamky, ktoré neležia na jednej rovine a nemajú ani jeden bod spoločný.

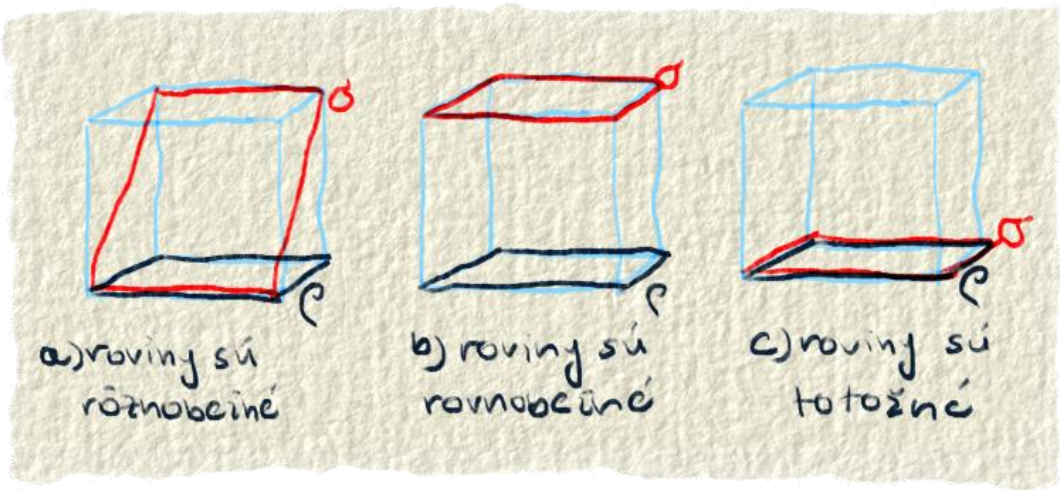
Rovnobežné priamky a roviny sú rovnobežné ak nemajú ani jeden bod spoločný. (ak priamka patrí rovine tak všetky jej body patria rovine ale naopak to neplatí)

Rôznobežné priamky a roviny sú rôznobežné ak majú jeden bod spoločný.



Rovnobežné roviny sú roviny, ktoré nemajú ani jeden bod spoločný. (totožné roviny maju všetky body rovnaké).

Rôznobežné roviny sú roviny, ktoré majú spoločnú množinu bodov, ktoré patria priamke p, ktorá patrí obom rovinám, tá sa nazýva priesečnica dvoch rovín.



Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy

Vysvetlite obsah pojmov uhol dvoch priamok, uhol priamky a roviny, uhol dvoch rovín, vzdialenosť bodu od priamky, vzdialenosť dvoch priamok, vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín. Pojmy vysvetlite na konkrétnom príklade na zvolenom telese.

Uhol (odchýlka) dvoch priamok je veľkosť nulového, ostrého alebo pravého uhla, ktoré priamky zvieraju.

- **Rovnobežné** priamky zvierajú uhol 0 stupňov
- **Kolmé** priamky zvierajú uhol 90 stupňov
- **Rôznobežné** priamky zvierajú uhol na intervale (0,90) stupňov
- **Mimobežné** priamky taktiež zvierajú uhol na intervale (0,90) stupňov. Ale na to aby sme našli uhol musíme z dvoch mimobežných priamok vytvoriť ďalšie 2 (alebo jednu), ktoré sú s prvými rovnobežné. $p||p´ \quad q||q´$ Uhol mimobežných priamok p a q je totožný s uhlom na im rovnobežných priamkách p´ a q ´, ktoré leža na jednej rovine.

Uhol priamky p **a roviny** β sa rovná uhlu priamky p a priamky q, ktorá je kolmým priemetom na rovinu β.

Uhol dvoch rovín α a β sa rovná uhlu dvoch priamok p a q, pričom priamka p patrí rovine α, priamka q patrí rovine β a obe sú kolmé na priesečnik rovín α a β.

Vzdialenosť bodu a priamky: hľadáme vzdialenosť bodu A a bodu X, ktorý je určený kolmicou na priamku p cez bod A (inak povedané: bod X je najbližší možný bod ku bodu A, ktorý stale patrí priamke p)

$$|p, A| = \frac{|p_a . A_x + p_b . A_y + p_c|}{\sqrt{{p_a}^2 + {p_b}^2}}$$

(priamka vo všeobecnom tvare)

Vzdialenosť dvoch priamok p a q, je určená vzdialenosťou dvoch bodov A a B, ktoré su priesečnikmi priamok p a q a priamky r ktorá je kolmá na priamky p a q. (čiže vzdialenosť ich dvoch najbližších bodov pri mimobežnosti. Ak sú rovnobežné tak tých dvojíc je nekonečno)

Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín α a β je vlastne vzdialenosť roviny β a bodu A, ktorý patrí rovine α. **Vzdialenosť** je určená vzdialenosťou dvoch bodov A a B, ktoré su priesečnikmi rovín α a β a priamky r ktorá je kolmá na roviny α a β. (nekonečne vela dvojic)

$|\beta, A| = \frac{|\beta_a . A_x + \beta_b . A_y + \beta_c . A_z + \beta_d|}{\sqrt{{\beta_a}^2 + {\beta_b}^2 + {\beta_c}^2}}$ (toto netreba vedieť ale iba pre kontext)

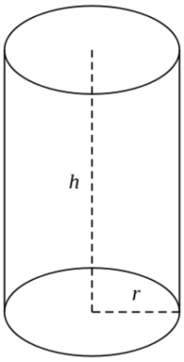
Pojmy vysvetlite na konkrétnom príklade na zvolenom telese: pre vysvetlenie to vysvetlíš na kocke napríklad so stranou 1cm. Čiže vzdialenosť jej strán a hrán s bodmy atď… Presne ako bolo znázornené na obrazkoch vyšie ohľadom rovnobežnosti…

Rotačné telesá

Definujte rotačné telesá: valec, kužeľ, guľa. Načrtnite ich a popíšte ich základné parametre a vlastnosti. Uveďte vzorce pre výpočet objemov a povrchov týchto telies. Vysvetlite význam parametrov nachádzajúcich sa v daných vzorcoch.

Rotačné teleso je teleso vytvorené rotáciou rovinnej plochy okolo pevnej priamky (osi).

Valec vznikol rotáciou obdĺžnika s rozmermi r, h okolo jednej z jeho strán.



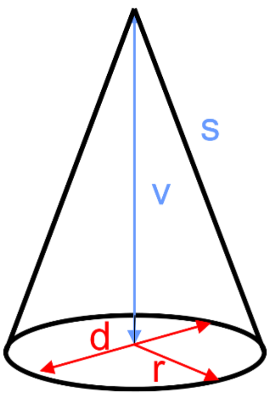
$\boldsymbol{V = \pi . r^2 . h}$ = (povrch podstavy h-krát postavený na seba)

(S = $2(\pi . r^2) + 2\pi . r . h$)

$\boldsymbol{S = 2 . \pi . r . (r + h)}$ = (súčet povrchov oboch podstáv a plášťu čo je vlastne obvod kruhu 2π.r (dĺžka obdlžnika) krát výška valca h (výška obdlžnika)).

h = výška válca; r = polomer podstavy

Kužeľ vznikol rotáciou pravouhleho trojuholníka s rozmermi v, s, r okolo jednej z jeho odvesien.



$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \pi . r^2 . v}$ = (povrch podstavy v-krát postavený na seba s tým rozdielom že sa podstava zmenšuje. Môžeme vidieť podobnosť s válcom. Zvyšné 2/3 je obsah, ktorý by nam doplnil obsah do valca)

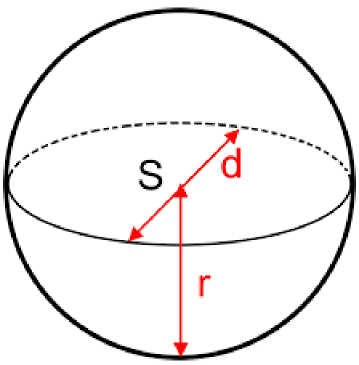
($S = \pi . r^2 + \pi . r . s$)

$\boldsymbol{S = \pi . r . (r + s)}$ = (súčet povrchu podstavy a povrchu plášťa, čo je vlastne s (dĺžka obdlžnika) krát π.r (šírka obdlžnika)).

s = $\sqrt{r^2 + v^2}$

v = výška kužeľa; r = polomer podstavy; s = dĺžka strany kužeľa

Guľa je teleso, ktoré vznikne otáčaním polkruhu okolo jeho priemeru.



V = $\frac{4}{3} . \pi . r^3$ = (objem gule je vlastne obsah kruhu, 2r – krát postavený na seba, a zaoblena do kruhu). Obsah kruhu sa rovná 4/3 obsahu vlacu pre ktorý platí h = r.

$S = 4 . \pi . r^2$ = (netrufam si tot vysvetliť ak chcete ale zavolajte na toto číslo: 0918021867)

r = polomer gule

Hranaté telesá

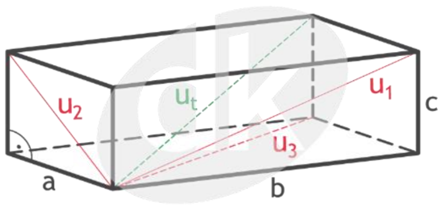
Popíšte hranaté telesá: kváder, kocka, ihlan, štvorsten. Načrtnite ich, popíšte ich vlastnosti (z hľadiska počtu stien, hrán a vrcholov). Napíšte vzorce pre výpočet objemov a povrchov týchto telies. Vysvetlite význam parametrov nachádzajúcich sa v daných vzorcoch.

Hranaté telesá sú ohraničené mnohouholníkovými stenami, nazývame ich mnohosteny.

Eulerova veta udáva vzťah medzi počtom vrcholov v, hrán h a stien s konvexného mnohostena, platí

v - h + s = 2 .

Kváder je telesso, ktorého plášť tvorí 6 pravouhlych štvoruholníkov.



Počet vrcholov 8

Počet hrán 12

Počet stien 6

V = a.b.c = (povrch jednej strany a.b kvádra, c- krát postavený na seba

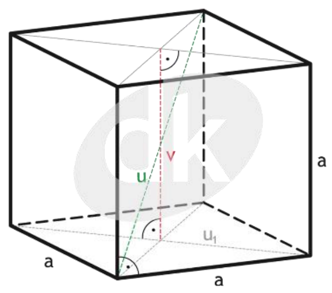
S = 2(ab+bc+ac) = (súčet šiestich strán)

$\boldsymbol{u = \sqrt{a^2 + b^2}}$

$\boldsymbol{u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

a = dĺžka; b = šírka; c = výška (zameniteľné)

Kocka je telesso, ktorého plášť tvorí 6 pravouhlych štvorcov



Počet vrcholov 8

Počet hrán 12

Počet stien 6

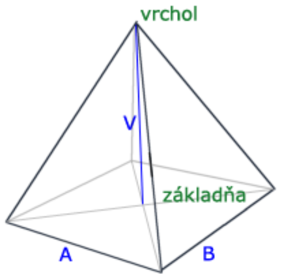
V = $\boldsymbol{a^3}$ = (povrch strany a^2 kocky, a-krát postavená na seba)

S = $\boldsymbol{6a^2}$ = (súčet šiestich strán)

$\boldsymbol{u = a\sqrt{2}}$ $\boldsymbol{u_t = a\sqrt{3}}$

a = hrana kocky

Ihlan je teleso, v ktorom sú rohy podstavy priamočiaro spojené s nejakým bodom (nazývaným vrchol ihlana) a nachádzajúcim sa mimo roviny tohto mnohouholníka.

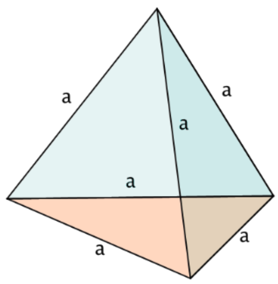


V = $\frac{1}{3}Sp.v$ = (povrch podstavy, v-krát postavený na seba s tým rozdielom že sa podstava zmenšuje. Môžeme vidieť podobnosť s hranolom. Zvyšné 2/3 je obsah, ktorý by nam doplnil obsah do hranolu)

S = Sp + Q

a = strana podstavy; v = výška ihlanu (vzdialenosť vrcholu od podstavy), Sp = obsah podstavy (štvorec, trojuholník, mnohouholník), Q = obsah plášťa

Štvorsten alebo **tetraéder** je mnohosten, ktorý má práve štyri steny tvorené rovnostrannými trojuholníkmi. (je to platónske teleso, čiže je tvorené len tými istými pravidelnými stenami)



Počet vrcholov 4

Počet hrán 6

Počet stien 4

V = $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

S = $a^2\sqrt{3}$

a = strana podstavy; v = výška ihlanu (vzdialenosť vrcholu od podstavy)