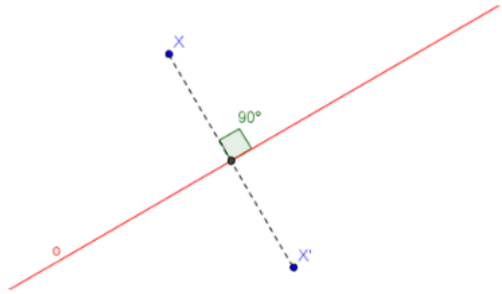
3.3 Zhodné a podobné zobrazenia v rovine

Zhodné zobrazenia v rovine

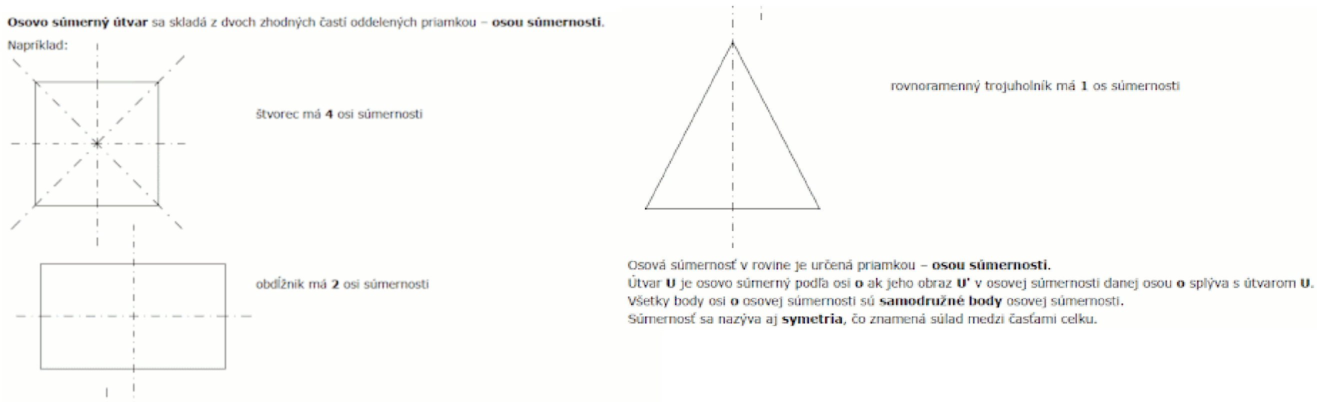
Vymenujte a charakterizujte zhodné zobrazenia v rovine, čím sú jednoznačne určené. Vymenujte útvary, ktoré sú osovo alebo stredovo súmerné.

OSOVÁ SÚMERNOSŤ – (O) – osová súmrnosť, kt. os súmernosti je o a X je bod neležiaci na nej, zobrazí X⟶X´ tak, že: **XX´⊥ o** **IXoI=IX´oI**



vlastnosti osovej súmernosti:

- priamka rovnobežná s osou súmernosti sa zobrazí do priamky rovnobežnej s osou súmernosti
- uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu



Osovo súmerný útvar sa skladá z dvoch zhodných častí oddelených priamkou – **osou súmernosti**.
Napríklad:

štvorec má **4** osi súmernosti

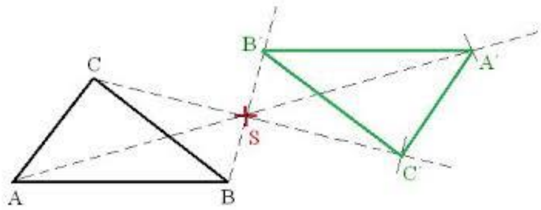
obdĺžnik má **2** osi súmernosti

rovnoramenný trojuholník má **1** os súmernosti

Osová súmernosť v rovine je určená priamkou – **osou súmernosti**.
Útvar **U** je osovo súmerný podľa osi **o** ak jeho obraz **U'** v osovej súmernosti danej osou **o** splýva s útvarom **U**.
Všetky body osi **o** osovej súmernosti sú **samodružné body** osovej súmernosti.
Súmernosť sa nazýva aj **symetria**, čo znamená súlad medzi časťami celku.

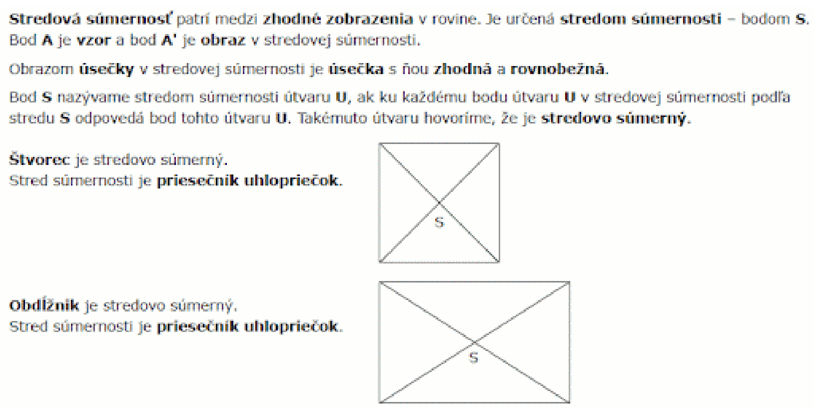
os súmernosti – priamka, kt. je zobrazená osová súmernosť

STREDOVÁ SÚMERNOSŤ – (S) – stredová súmernosť, kt. stred súmernosti je S a X je bod rôzny od S, zobrazí X⟶X´ tak, že: **S je stredom úsečky XX´**



vlastnosti stredovej súmernosti:

- priamka p, prechádzajúca stredom S sa zobrazí sama do seba
- priamka p, neprechádzajúca stredom S sa zobrazí do priamky rovnobežnej s priamkou p

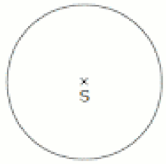


Stredová súmernosť patrí medzi **zhodné zobrazenia** v rovine. Je určená **stredom súmernosti** – bodom **S**.
Bod **A** je **vzor** a bod **A'** je **obraz** v stredovej súmernosti.
Obrazom **úsečky** v stredovej súmernosti je **úsečka** s ňou **zhodná** a **rovnobežná**.
Bod **S** nazývame stredom súmernosti útvaru **U**, ak ku každému bodu útvaru **U** v stredovej súmernosti podľa stredu **S** odpovedá bod tohto útvaru **U**. Takémuto útvaru hovoríme, že je **stredovo súmerný**.

Štvorec je stredovo súmerný.
Stred súmernosti je **priesečník uhlopriečok**.

Obdĺžnik je stredovo súmerný.
Stred súmernosti je **priesečník uhlopriečok**.

Kruh je stredovo súmerný.
Stred súmernosti je **stred kruhu.**



Pravidelný mnohouholník s párnym počtom vrcholov **je** stredovo súmerný (šesťuholník, osemuholník, desaťuholník,...).

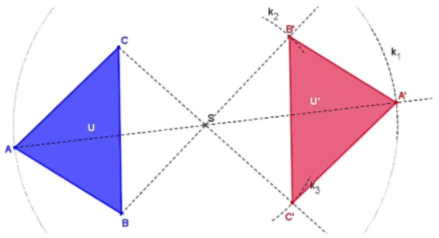
Pravidelný mnohouholník s nepárnym počtom vrcholov **nie je** stredovo súmerný (päťuholník, sedemuholník, deväťuholník,...).

Bod, ktorý splýva so svojím obrazom sa nazýva **samodružný bod**. Bod **S** je **jediný samodružný bod** v stredovej súmernosti.

stred súmernosti

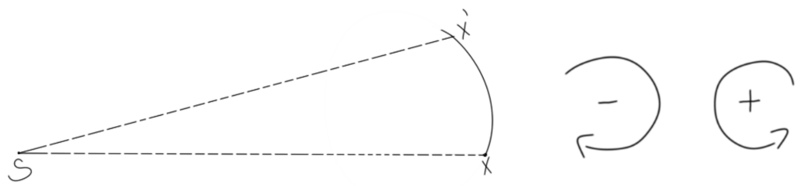
Nech S je daný bod. Zobrazenie, pre ktoré platí:

- obrazom bodu S je bod S
- obrazom bodu X≠S je bod X', pre ktorý platí, že bod S je stredom úsečky XX' nazývame **stredová súmernosť**
- bod S sa nazýva **stred súmernosti**



POSUNUTIE – (P) – posunutie o vektor $\vec{u}$ zobrazí X→X´ tak, že: $\overrightarrow{\boldsymbol{XX'}} = \vec{\boldsymbol{u}}$

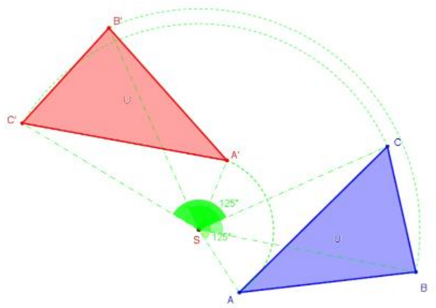
OTOČENIE – (R) – Rotácia – otočenie bodu X o uhol φ okolo bodu S zobrazí bod X rôzny od bodu S, X→X´ tak, že: **ISXI=ISX´I, orientovaný uhol φ má rovnakú veľkosť ako uhol XSX´**



stred otočenia

Nech je daný bod S, uhol α (veľkosť uhla je nanajvýš 360°) a orientácia kladná (proti smeru hodinových ručičiek) resp. záporná (v smeru hodinových ručičiek). Zobrazenie, pre ktoré platí:

- obrazom bodu S je bod S
- obrazom bodu X≠S je bod X', ktorý leží na kružnici k(S;SX) a zároveň uhol XSX' je zhodný s uhlom α, pričom orientácia je kladná, resp. záporná, sa nazýva **otáčanie**
- bod S sa nazýva **stred otáčania**



Uhol otočenia

Nech je daný bod S a **orientovaný uhol φ** ktorého základná veľkosť nie je nulová. Zobrazenie, ktoré bodu S preradí ten istý bod S a každému bodu X ≠ S priradí taký bod X´, že SX ≅ SX´ a orientovaný uhol XSX´ je zhodný s orientovaným uhlom φ sa nazýva **otočenie alebo rotácia**. Bod S sa nazýva stred otočenia, orientovaný uhol φ, **uhol otočenia.**

Orientovaným uhlom rozumieme usporiadanú dvojicu polpriamok so spoločným začiatkom. Základnou veľkosťou orientovaného uhla AVB rozumieme veľkosť uhla AVB, ktorý sa vytvorí otočením polpriamky VA do polpriamky VB pri pohybe v kladnom zmysle (proti smeru otáčania hodinových ručičiek).

Podobné zobrazenia v rovine

Definujte podobné zobrazenie v rovine, čím je jednoznačne určené. Opíšte zobrazenie bodu, priamky a trojuholníka v rovnoľahlosti (homotetii). Zapíšte vlastnosti vzdialenosti bodu a jeho obrazu. Určte podmienky pre koeficient rovnoľahlosti tak, aby
a) rovnoľahlosť bola identita
b) rovnoľahlosť bola stredová súmernosť

Podobné zobrazenie – je zobrazenie, ktoré ľubovoľným dvom vzorom X, Y priradí dva obrazy X´, Y´ tak, že platí: **k. IXYI = IX´Y´I**, kde k je kladné reálne číslo, **k je koeficient podobného zobrazenia** (Všetky veľkosti sa rovnako zväčšujú/zmenšujú. Skutočnosť, že sa bod X zobrazí do bodu X´sa označuje: X $\rightarrow$ X´)

zachováva: dĺžky v pomere, uhly

HOMOTETIA (Rovnoľahlosť)

- je to podobné zobrazenie jednoznačne určené stredom S a koeficientom k.
- môžeme ho chápať ako úlohu ako určiť pozíciu bodu X podľa násobku jeho pôvodnej vzdialenosti od pevného bodu S

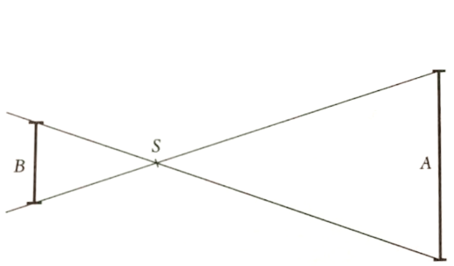
Označenie: H(S, k)

- Dva útvary U1, U2 sú podobné, ak pre všetky dvojice bodov $[X_1, Y_1]$ útvaru U1 existuje také priradenie bodov $[X_2, Y_2]$ útvaru U2, že platí: **$IX_2, Y_2I = k.IX_1, Y_1I$**
- **k** je **koeficient podobnosti,** je to číslo, kt. určuje koľko krát sú dĺžky zobrazeného útvaru väčšie, alebo menšie oproti pôvodnému útvaru

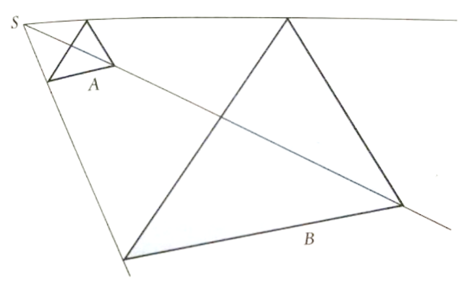
Homotetia je zobrazenie, kt. bodu X zobrazí bod X´ tak, že platí:

- X=X´ $\Leftrightarrow$ X=S
- (X$\neq$X´ $\Leftrightarrow$ X$\neq$S) $pričom\ platí$ (IX´SI=IkI.IXSI) $\wedge$ (X´$\in \overrightarrow{SX} \Leftrightarrow k > 0$)
- X´$\in$ polpriamke opačnej k $\overrightarrow{SX} \Leftrightarrow k < 0$

Útvar $A \rightarrow$ útvaru B v $H(S; -0,4)$



Útvar $A \rightarrow$ útvaru B v $H(S;3)$



Určte podmienky pre koeficient rovnoľahlosti tak, aby:
a) rovnoľahlosť bola identita: **k=0**
b) rovnoľahlosť bola stredová súmernosť: **k=-1**

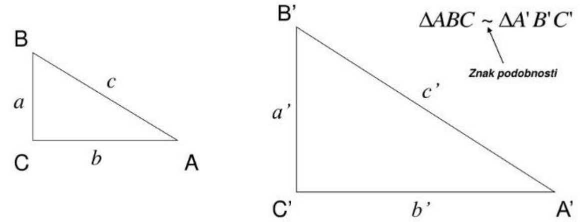
Zhodnosť a podobnosť

Vysvetlite, kedy sú dva útvary zhodné a podobné. Čo zachováva zhodnosť a čo podobnosť. Vyslovte vety o zhodnosti a podobnosti trojuholníkov. Konkretizujte na príkladoch.

zhodné zobrazenie – je zobrazenie, ktoré ľubovoľným dvom vzorom X, Y priradí dva obrazy X´, Y´ tak, že platí: IXYI = IX´Y´I (všetky veľkosti sa zachovávajú)
Zachováva: dĺžky, uhly
podobné zobrazenie – je zobrazenie, ktoré ľubovoľným dvom vzorom X, Y priradí dva obrazy X´, Y´ tak, že platí: **k. IXYI = IX´Y´I**, kde k je kladné reálne číslo, **k je koeficient podobného zobrazenia**
(Všetky veľkosti sa rovnako zväčšujú/zmenšujú. Skutočnosť, že sa bod X zobrazí do bodu X´sa označuje: X $\to$ X´)

zachováva: dĺžky v pomere, uhly

Definícia Podobnosti trojuholníkov

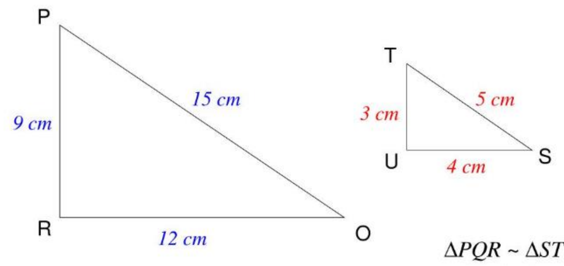


Dva trojuholníky sa podobné, ak majú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si strán a zhodné odpovedajúce si uhly.

$$k = \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} \qquad \alpha \cong \alpha' \quad \beta \cong \beta' \quad \gamma \cong \gamma'$$

Znak zhodnosti

Príklad na vetu (sss)

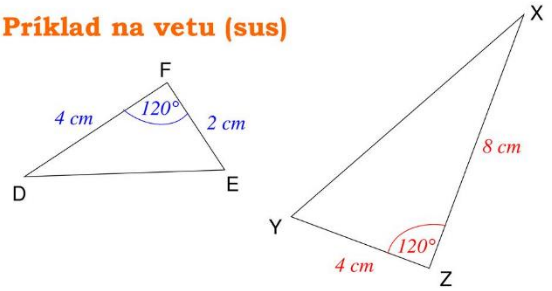


$\Delta PQR \sim \Delta STU$ (sss)

$$\frac{u}{r} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \qquad \frac{t}{p} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \qquad \frac{s}{q} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \qquad k = \frac{1}{3}$$

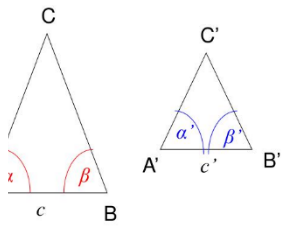
Poznámka: Koeficienty musia byť všetky tri rovnaké. Ak by boli len dva rovnaké, tak by trojuholníky neboli podobné.

Príklad na vetu (sus)



VETA (uu)

Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch sú podobné.

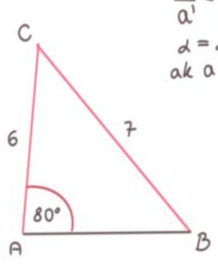


$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$
$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$

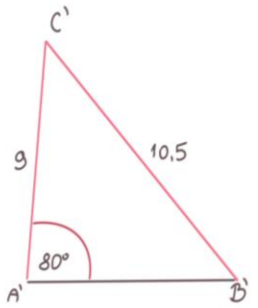
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Veta (Ssu)

Dva trojuholníky sú podobné, ak sa rovnajú pomery dĺžok dvoch dvojíc strán a veľkosti tých uhlov, kt. ležia oproti každej z nich.

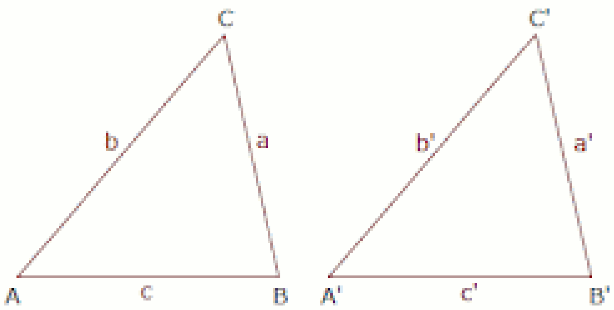


$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$
$\alpha = \alpha'$
ak $a > b$



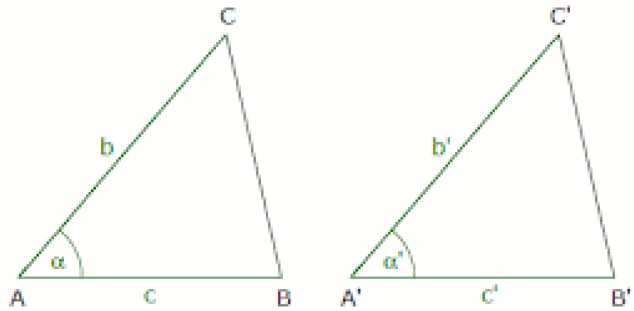
Zhodnosť trojuholníkov

Veta sss: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú vo všetkých troch stranách, sú zhodné.



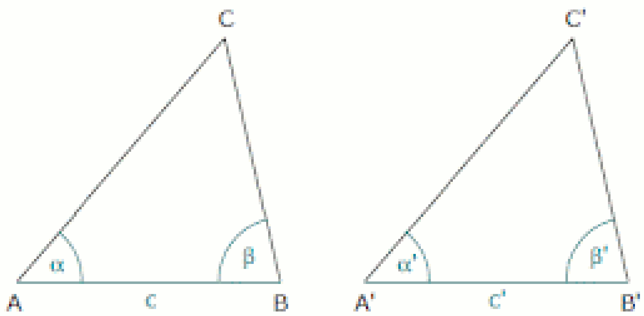
$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
$AB \cong A'B'$
$BC \cong B'C'$
$AC \cong A'C'$

Veta sus: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom, sú zhodné.



$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
$AB \cong A'B'$
$AC \cong A'C'$
$\alpha \cong \alpha'$

Veta usu: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej strane a dvoch uhloch k nej priľahlých, sú zhodné.



$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
$AB \cong A'B'$
$\alpha \cong \alpha'$
$\beta \cong \beta'$

Veta Ssu: Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú vo veľkosti dĺžok dvoch strán a veľkosti toho uhla, kt. lež oproti ´väčšej z nich.