3.2 Analytická geometria v rovine

Sústavy súradníc na priamke, v rovine, v priestore

Vysvetlite obsah pojmov: sústava súradníc na priamke, v rovine a v priestore, súradnice bodu, súradnice stredu úsečky, vzdialenosť dvoch bodov. Dané pojmy objasnite pre dva rôzne body v prvom kvadrante súradnicovej sústavy.

Súradnicová sústava (karteziánska)

= sú to na seba kolmé priamky (osi) prechádzajúce jedným bodom , na všetkých osiach sú jednotky rovnakej dĺžky - karteziánska sústava

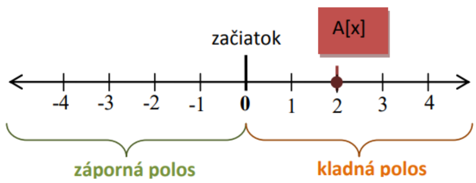
Zavedieme ju nasledovne:

1. zvolíme začiatok súradnicovej sústavy 0
2. začiatkom 0 vedieme priamky x, y, z, ktoré nazývame súradnicové osi
3. osi orientujeme, určíme si kladný a záporný smer od začiatku 0. Osi sa tak rozdelia na kladnú
4. a zápornú časť(poloos). Kladnú poloos označujeme obvykle šípkou.
5. zvolíme jednotky na osiach

K takto zvolenej súradnicovej sústave je ku každému bodu priradená usporiadaná n-tica reálnych čísel, ktoré nazývame súradnicami bodu a naopak, každá usporiadaná n-tica reálnych čísel udáva polohu práve jedného bodu v zvolenej súradnicovej sústave.

1. na priamke (číselná os)

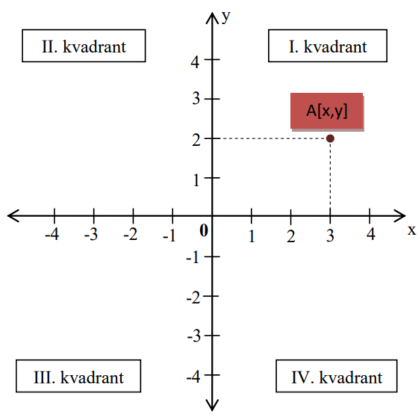
Číslo x nazývame súradnicou bodu A. Zápis **A[x]** čítame: "bod A má súradnicu x".



2. v rovine

Číslo x nazývame prvou súradnicou bodu A (súradnica x), číslo y druhou súradnicou bodu A (súradnica y). **A[x, y]**

Sústava rozdelí rovinu na štyri časti (kvadranty).



3. v priestore

Číslo x nazývame prvou súradnicou bodu A (súradnica x), číslo y druhou súradnicou bodu A (súradnica y), číslo z treťou súradnicou bodu A. **A[x, y, z]**

Sústava súradníc v priestore pozostáva z troch navzájom si kolmých priamok, ktoré nazývame osi, s rovnakou mierkou (dĺžka, výška, hĺbka). Sústava súradníc sa nazýva aj karteziánska, podľa zakladateľa analytickej geometrie Reného Descartesa. V rovine sú to len 2 osi a na priamke je to jedna os.

Súradnice bodu, sú dvojica (trojica) čísel, ktoré určujú polohu bodu v rovine (v priestore).

Súradnice stredu úsečky AB sú súradnice bodu S, ktorý sa nachádza medzi bodom B a A, tak že bod S je rovnako vzdialený od bodu A ako aj od bodu B.

S = $[\frac{A_x - B_x}{2}, \frac{A_y - B_y}{2}]$

Vzdialenosť 2 bodov: $|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{(\boldsymbol{B_x} - \boldsymbol{A_x})^2 + (\boldsymbol{B_y} - \boldsymbol{A_y})^2}$

(pri priestore len pridáš argument s z)

Priamky v rovine a ich polohy 1

Vysvetlite pojmy súradnicová sústava na priamke, v rovine. Definujte všeobecnú rovnicu priamky a smernicový tvar rovnice priamky. Čo platí pre smernice, resp. koeficienty všeobecných rovníc dvoch rovnobežných priamok , kolmých priamok a vzdialenosť bodu od priamky?

Sústava súradníc v priestore pozostáva z troch navzájom si kolmých priamok, ktoré nazývame osi, s rovnakou mierkou (dĺžka, výška, hĺbka). Sústava súradníc sa nazýva aj karteziánska, podľa zakladateľa analytickej geometrie Reného Descartesa. V rovine sú to len 2 osi a na priamke je to jedna os.

Všeobecná rovnica priamky: $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{c} = 0$

Koeficienty a, b sú súradnicami **normálového vektora priamky p**. Normálový vektor je kolmý na smerový vektor priamky p.

c je rovné skalárnemu súčinu polohového vektora ľubovoľného bodu priamky s normálovým vektorom [a;b].

Číslo |c| je priamo úmerné vzdialenosti priamky od začiatku súradnicovej sústavy.

Smernicový tvar rovnice priamky: y = kx + q, k ≠ 0

(k = smernica, uhol priamky, **k = tg μ**, čiže ak je **k =0 tak je rovnica rovnobežná s osou x**, ak je k kladná tak je rovnica rastúca a k je záporná tak je klesajúca, **rovnobežná s osou y byť nemôže kedže tangenc nie je def. pre uhol 90 stupňov** ; taktiež k sa dá vypočítať ako podiel smerového vektora priamky **k =** $\boldsymbol{\frac{u_2}{u_1}}$ (q = vzdialenosť priesečniku osi y a priamky))

$$\boldsymbol{y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}} \qquad \boldsymbol{k = \frac{-a}{b}} \qquad \boldsymbol{q = \frac{c}{b}}$$

koeficienty všeobecných rovníc dvoch rovnobežných priamok: ak sú dva priamky rovnobežné tak sú koeficienty **a1**,**b1** násobkom **a2,b2** (alebo naopak), čiže Normálové alebo smerové vektory, ktoré vieme vybrať z rovnice sú rovnaké.

koeficienty všeobecných rovníc dvoch kolmých priamok: ak sú dva priamky rovnobežné tak sú koeficienty a1,b1 násobkom b2,a1 (alebo naopak), čiže Normálový a smerový alebo smerový a normálový vektor, ktoré vieme vybrať z rovnice sú rovnaké.

Vzdialenosť bodu od priamky: $|p, A| = \frac{|p_a.A_x + p_b.A_y + p_c|}{\sqrt{{p_a}^2 + {p_b}^2}}$

Priamky v rovine a ich polohy 2

Charakterizujte a zapíšte spôsoby analytického vyjadrenia priamky v rovine. Klasifikujte vzájomné polohy dvoch priamok v rovine. Vysvetlite, ako sa dá určiť vzájomná poloha dvoch priamok z ich analytického vyjadrenia.

Parametrický zápis priamky: A$[a_1, a_2]$ **v**$\{v_1, v_2\}$

x = $a_1 + t.v_1$

y = $a_2 + t.v_2$

Všeobecný zápis priamky:

ax + by +c = 0

Smernicový zápis priamky:

y = kx + q

Klasifikujte vzájomné polohy dvoch priamok v rovine: rovnobežné (totožné), rôznobežné (kolmé)

> **Rovnobežné priamky** sú priamky, ktoré nemajú ani jeden spoločný bod (totožné priamky majú všetky body spoločné).
>
> **Rôznobežné priamky** sú priamky, ktoré majú jeden bod spoločný. (kolmé priamky maju medzi sebou uhol 90 stupňov)

Vysvetlite, ako sa dá určiť vzájomná poloha dvoch priamok z ich analytického vyjadrenia:

Ak máme parametrickú alebo všeobecnú rovnicu priamky tak z nich vieme vybrať vektory (buď normálové alebo smerové) a tie porovnať. Ak sú rovnaké tak priamky sú rovnobežné ak niesu tak sú rôznobežné. Ak je celá rovnica násobkom druhej tak sú priamky totožné. Ak su vektory na seba kolmé tak aj priamky sú na seba kolmé.

Ak máme smernicový zápis vieme vybrať koeficienty k a q. Ak sa koeficienty k rovnajú tak sú rovnice rovnobežné a ak sú aj koeficienty q rovnaké tak sú priamky totožné.

Vektory a operácie s nimi

Objasnite pojem úsečka, orientovaná úsečka a vektor. Vymenujte operácie medzi vektormi. Vysvetlite, čo je skalárny súčin vektorov, uveďte vzťah na výpočet uhla dvoch vektorov.

Úsečka je časť priamky medzi dvoma bodmi.

Orientovaná úsečka je úsečka ktorá je nekonečná do jedného smeru.

Vektor je množia všetkých rovnobežných, rovnako veľkých, rovnako orientovaných úsečiek.

Operácie s vektormi :

Sčítanie vektorov: a + b = $(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$

Odčítanie vektorov: a – b = $(a_1 - b_1,\ a_2 - b_2)$

Násobenie vektorov: k . a = $(a_1.k\ ,\ a_2.k)$

Súčin vektorov: a x b = u (Výsledný vektor je kolmý na obidva pôvodné vektory. To platí iba v priestore, takže skalárny súčin týchto vektorov bude 0.)

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{i}\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u \right)$$

u = $(a_2 b_3 - b_2 a_3\ ,\ a_3 b_1 - b_3 a_1\ ,\ a_1 b_2 - b_1 a_2)$

Skalárny súčin vektorov: a . b = $a_1 b_1 + a_2 b_2$ (Výsledkom je číslo, ak sú na seba kolmé tak je rovný nule)

taktiež: a . b = |a| . |b| . cos μ

Uhol dvoch vektorov: vyjadríme si zo skalárneho súčinu: $\boldsymbol{cos}\ \mu = \frac{\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| . |\boldsymbol{b}|}$

μ patrí do množiny <0 až 180 stupňov>

3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie

Kružnica a kruh

Definujte kružnicu a kruh ako množinu bodov. Zapíšte stredovú a všeobecnú rovnicu týchto útvarov. Vysvetlite ako zistíme, či daný bod patrí alebo nepatrí kružnici a kruhu. Vysvetlite, ako nájdete stred a polomer kružnice, ak je daná všeobecnou rovnicou.

Kružnica je množina bodov, ktorých vzdialenosť od daného bodu S sa rovná polomeru kružnice r.

Kruh je množina bodov, ktorých vzdialenosť od daného bodu S sa rovná alebo je menšia od polomeru kruhu r.

Stredová rovnica kružnice: $(x+a)^2 + (y+b)^2 = r^2$

Stredová rovnica kruhu: $(x+a)^2 + (y+b)^2 \leq r^2$

Všeobecná rovnica kružnice: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Všeobecná rovnica kruhu: $x^2 + y^2 + ax + by + c \leq 0$

Vysvetlite ako zistíme, či daný bod patrí alebo nepatrí kružnici a kruhu: ak dosadíme do rovnice (či všeobecnej alebo stredovej) a výsledná rovnica platí tak aj bod patrí do kruhu/kružnici.

Vysvetlite, ako nájdete stred a polomer kružnice, ak je daná všeobecnou rovnicou: premeníme si všeobecnú rovnicu na stredovú aby sme vôbec zistili či je rovnica rovnicou kruhu/kružnice. Zo stredového zápisu rovnice kruhu vieme už vypísať parametre kruhu/kružnice (ako polomer r a súradnice stredového bodu S[a,b]) $(x+a)^2 + (y+b)^2 = r^2$