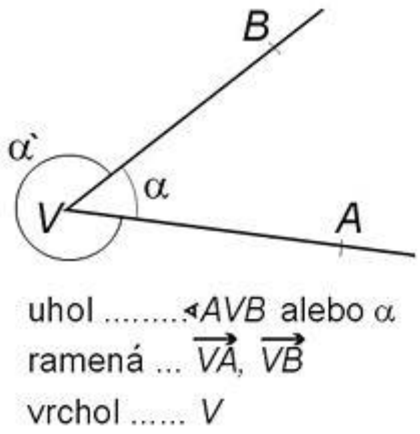
3.1 Planimetria

Uhly

Definujte uhol, popíšte jeho časti. Urobte diskusiu vzhľadom na polohové a metrické vzťahy medzi uhlami. Podrobne popíšte obvodový a stredový uhol. Vysvetlite aký je medzi nimi vzťah.



Uhol je plocha medzi 2 polpriamkami, ktoré začínajú v spoločnom bode, ten sa nazýva vrchol.

Druhy uhlov:

Nulový uhol je uhol, ktorého ramená ležia na sebe (všetky ich body sú totožné). Má presne 0°.

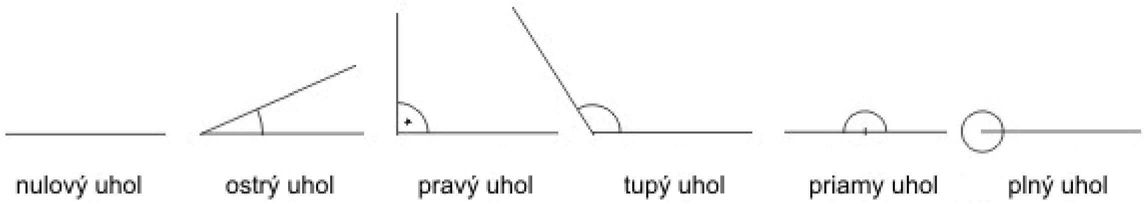
Ostrý uhol je uhol menší ako pravý uhol. Má viac ako 0° ale menej ako 90°.

Pravý uhol je polovica priameho uhla. Označujeme ho bodkou v oblúčiku, alebo hranatým "oblúčikom". Má presne 90°.

Tupý uhol je väčší ako pravý uhol. Má viac ako 90° ale menej ako 180°.

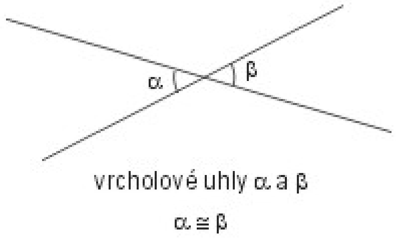
Priamy uhol je uhol, ktorého ramená sú navzájom opačné polpriamky, čiže spolu vytvárajú priamku. Má presne 180°.

Plný uhol je uhol, ktorého ramená sú totožné (ležia na sebe). Za uhol považujeme celú rovinu okolo nich. Je to doplnok nulového uhla v rovine. Má presne 360°.

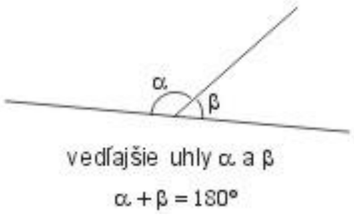


Dvojice uhlov:

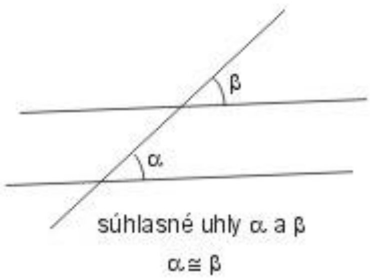
Vrcholové uhly sú dva uhly, ktorých ramená sú opačné polpriamky. Vrcholové uhly sú zhodné.



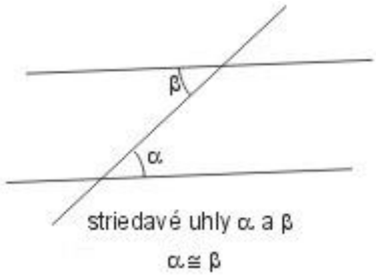
Vedľajšie (susedné) uhly sú dva uhly, ktorých jedno rameno je spoločné a druhé ramená sú opačné polpriamky. Súčet vedľajších uhlov je priamy uhol, teda dva susedné uhly zvierajú 180°.



Súhlasné uhly sú dva uhly, ktorých prvé ramená ležia na jednej priamke a druhé ramená sú rovnobežné, pritom smer príslušných ramien je rovnaký (súhlasný). Súhlasné uhly sú *zhodné*.

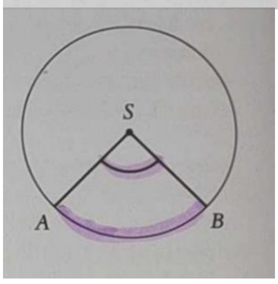


Striedavé uhly sú dva uhly, ktorých prvé ramená ležia na jednej priamke a druhé ramená sú rovnobežné, pritom smer príslušných ramien je opačný (striedavý). Striedavé uhly sú *zhodné*.

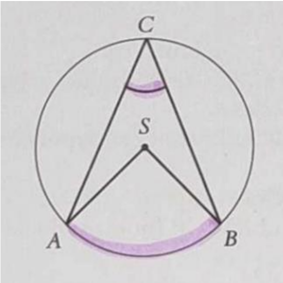


Uhly v kružnici

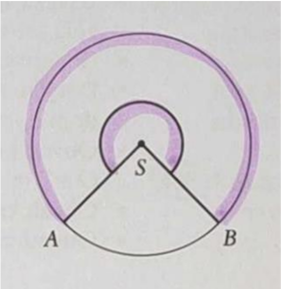
Dva body A, B ležiace na kružnici k(S, r) ju rozdelia na dva oblúky. Ak sú nerovnako dlhé nazveme ich **kratší** a **dlhší** oblúk. (kratší má menej ako πr a dlhší viac ako πr)



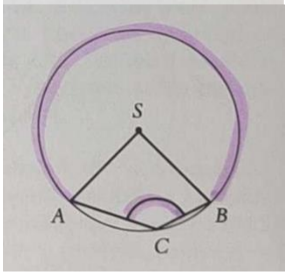
V kružnici k(S, r) je uhol ASB **stredový uhol** prislúchajúci ku **kratšiemu** kružnicovému oblúku AB. Ak stredový uhol prislúcha ku kratšiemu oblúku, tak **má menej ako 180°.**



Uhol ACB je **obvodový uhol** prislúchajúci ku **kratšiemu** kružnicovému oblúku AB, ak <u>bod C leží na kružnici a neleží na kratšom oblúku AB.</u>



V kružnici k(S, r) je uhol ASB **stredový uhol** prislúchajúci k **dlhšiemu** kružnicovému oblúku AB. Ak stredový uhol prislúcha ku kratšiemu oblúku, tak **má viac ako 180°.**



Uhol ACB je **obvodový uhol** prislúchajúci ku **dlhšiemu** kružnicovému oblúku AB, ak <u>bod C leží na kružnici a neleží na dlhšom oblúku AB.</u>

Stredový uhol α prislúchajúci k danému kružnicovému oblúku je 2x väčší ako obvodový uhol γ prislúchajúci k tomu istému oblúku. Teda platí: $\boldsymbol{\alpha = 2\gamma}$

Vzájomné polohy lineárnych útvarov

Definujte uhol dvoch priamok, vzdialenosť dvoch bodov, vzdialenosť bodu od priamky, vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok a uveďte vzťahy na ich výpočet v rovine.

Uhol (odchýlka) dvoch priamok: - totožné, rovnobežné, rôznobežné, (mimobežné v priestore)

Rovnobežné: $\vec{p}\,||\,\vec{q}$ ich odchýlka je 0°

Rôznobežné: $\vec{p} \nmid \vec{q}$ ich odchýlka je menší z uhlov na intervale (0°, 90°> (ostrý alebo pravý uhol)

Odchýlka dvoch priamok daných parametricky

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|},$$

kde $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ sú smerové vektory priamok p a q

Odchýlka dvoch priamok v rovine daných všeobecnou rovnicou

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|},$$

kde $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_q$ sú normálové vektory priamok p a q

Priesečník dvoch rôznobežných priamok P sa určí riešením sústavy ich rovníc.

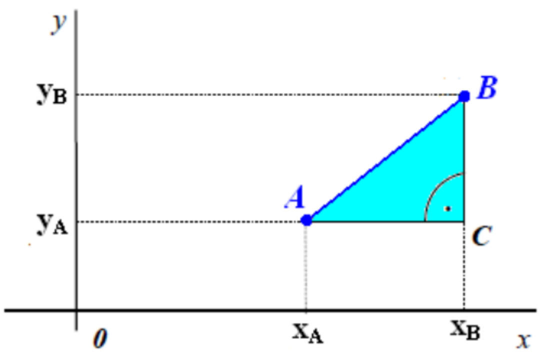
Vzdialenosť dvoch bodov na priamke

Vzdialenosť dvoch bodov $A=[x_A]$, $B=[x_B]$ na číselnej osi sa rovná absolútnej hodnote rozdielu reálnych čísel x_A a x_B, t.j. rozdielu ich súradníc:

$$|A, B| = |AB| = |\, x_B - x_A \,| = \sqrt{(x_B - x_A)^2} \qquad ($$

Vzdialenosť dvoch bodov v rovine

Vzdialenosť dvoch bodov $A=[x_A;\, y_A]$, $B=[x_B;\, y_B]$ v rovine určíme ako veľkosť prepony pravouhlého trojuholníka ABC:



$|AC| = |\, x_B - x_A \,|$, $|BC| = |\, y_B - y_A \,|$

$$|A, B| = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad ($$

Vzdialenosťou bodu M od priamky p:

nazývame vzdialenosť bodu M od päty kolmice vedenej z bodu M na priamku p.

$|Mp| = |MM'|;\ M' \in p \wedge MM' \perp p$

Vzdialenosť bodu $M[m_1; m_2]$ od priamky $p : ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$, vypočítame zo vzťahu:

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok:

Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok sa určí ako vzdialenosť bodu (ktorý patrí jednej priamke), od druhej priamky pomocou kolmice. Rovnako ako vzdialenosť bodu od priamky.

Trojuholníky

Definujte pojem trojuholník. Klasifikujte rôzne typy trojuholníkov. Vymenujte a charakterizujte základné prvky trojuholníka. Vysvetlite, čo znamená riešiť trojuholník a aké vety používame na riešenie pravouhlého a všeobecného trojuholníka.

Definícia trojuholníka:

Trojuholník je jeden zo základných rovinných geometrických útvarov; mnohouholník s troma vrcholmi a stranami. Je to dvojrozmerný útvar. Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180°.

- Trojuholník môžeme definovať ako prienik troch polrovín.
- Ak máme tri rôzne body A, B, C, (ktoré neležia na jednej priamke) tak trojuholníkom s vrcholmi A, B, C nazývame prienik polrovín ABC, ACB, BCA.
- Úsečky AB, BC, CA sú stranami tohto trojuholníka a ich zjednotenie je obvod trojuholníka.

Klasifikácia trojuholníkov:

Trojuholníky môžno triediť podľa viacerých kritérií:

1. Podľa dĺžky jeho strán:

- **Rovnostranný trojuholník** – všetky strany majú rovnakú dĺžku. Rovnostranný trojuholník je tiež rovnouhlý, t. j. všetky jeho vnútorné uhly majú rovnakú veľkosť, a to 60°; je to pravidelný mnohoulník.
- **Rovnoramenný trojuholník** – má práve dve strany rovnakej dĺžky. Rovnoramenný trojuholník má tiež dva rovnaké vnútorné uhly (sú to uhly, v ktorých obe rovnaké strany sa napájajú na tretiu). ::Rovnostranný trojuholník je tiež rovnoramenným, ale nie každý rovnoramenný trojuholník je rovnostranný.
- **Rôznostranný trojuholník** – všetky strany majú rozličnú dĺžku. Jeho vnútorné uhly sú taktiež rozdielne.

2. Podľa veľkosti najväčšieho vnútorného uhla:

- **Pravouhlý trojuholník** – má práve jeden vnútorný uhol s veľkosťou 90° (pravý uhol). Strana ležiaca oproti pravému uhlu sa nazýva prepona a je najdlhšou stranou v trojuholníku. Ostatné dve strany sa nazývajú odvesny.
- **Tupouhlý trojuholník** – má práve jeden vnútorný uhol väčší ako 90° (tupý uhol).
- **Ostrouhlý trojuholník** – má všetky vnútorné uhly menšie ako 90° (tri ostré uhly).

Prvky:

Výška:

Je to úsečka na priamke prechádzajúcej vrcholom trojuholníka a je kolmá na protiľahlú stranu. V ľubovoľnom trojuholníku prechádzajú všetky tri výšky jedným bodom, ktorý nazývame **ortocentrum.**

Ortocentrum môže mať ľubovoľnú polohu:

- **vo vnútri** - ak je trojuholník ostrouhlý
- **na obvode** - ak je trojuholník pravouhlý
- **mimo trojuholníka** - ak je trojuholník tupouhlý

Ťažnice trojuholníka:

- Ťažnice sú úsečky, ktoré spájajú stredy strán s vrcholmi protiľahlých strán.
- Prechádzajú jedným bodom, ktorý voláme ťažisko.
- Ťažisko delí každú z ťažníc v pomere 2 : 1, pričom dlhšia časť je medzi vrcholom a ťažiskom, a kratšia časť medzi ťažiskom a stredom strany.

Stredné priečky trojuholníka:

- Sú to spojnice stredov dvoch strán a sú rovnobežné s treťou stranou trojuholníka.
- Veľkosť strednej priečky sa rovná polovičnej veľkosti strany trojuholníka, s ktorou je rovnobežná.
- Stred. prieč. trojuholníka delí trojuholník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 1 : 3.

Kružnica opísaná trojuholníku:

- Je to kružnica, ktorá obsahuje vrcholy daného trojuholníka.
- Stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC je priesečník osí strán trojuholníka ABC.
- Polomer je spojnica stredu s ľubovoľným vrcholom.

Kružnica vpísaná trojuholníku:

- Je to kružnica, ktorá sa dotýka všetkých strán daného trojuholníka.
- Stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečník osí uhlov trojuholníka ABC (a leží vždy vnútri trojuholníka!).
- Polomer je vzdialenosť stredu od ľubovoľnej strany trojuholníka.

Osi strán:

- Priamky, ktoré prechádzajú stredom strán trojuholníka a sú na ne kolmé, nazývame osi strán. Pretínajú sa v jednom bode, ktorý je stredom opísanej kružnice (tento bod je rovnako vzdialený od všetkých vrcholov trojuholníka).

Výpočet obvodu: $o = a + b + c$

Výpočet obsahu: $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$

Čo znamená riešiť trojuholník:

Každý trojuholník je jednoznačne určený tromi údajmi, z toho musí byť aspoň jedna strana.

Riešiť trojuholník znamená **vypočítať ostatné strany a vnútorné uhly**.

Riešenie pravouhlého trojuholníka:

a) **Pytagorova veta**: Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad oboma odvesnami.
b) **Súčet ostrých uhlov** v pravouhlom trojuholníku sa rovná 90°.
c) **Goniometrické funkcie** ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku:

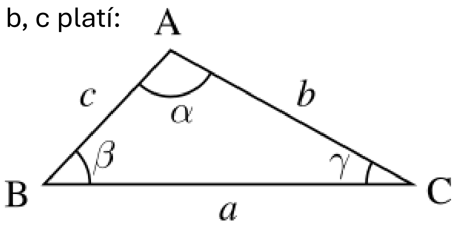
- sínus uhla a sa rovná podielu protiľahlej odvesny a prepony
- kosínus uhla a sa rovná podielu priľahlej odvesny a prepony
- tangens uhla a sa rovná podielu protiľahlej odvesny a priľahlej odvesny
- kotangens uhla a sa rovná podielu priľahlej odvesny a protiľahlej odvesny

Riešenie všeobecného trojuholníka:

Súčet všetkých vnútorných uhlov v trojuholníku sa rovná 180°.

Sínusová veta: Pomer strán a sínusov protiľahlých uhlov vo všeobecnom trojuholníku je konštantný a rovná sa priemeru opísanej kružnice.

Pre každý trojuholník ABC s vnútornými uhlami α, β, γ a stranami a, b, c platí:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

kde R je polomer opísanej kružnice pre tento trojuholník.

Čiže: Pomer všetkých dĺžok strán a hodnôt sínusov im protiľahlých uhlov je v trojuholníku konštantný.

Alebo: Pomer dĺžok strán trojuholníka sa rovná pomeru sínusov im protiľahlých uhlov:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$a\sin\beta = b\sin\alpha, \quad c\sin\beta = b\sin\gamma,$$
$$c\sin\alpha = a\sin\gamma$$

Kosínusová veta: Obsah štvorca zostrojeného nad stranou všeobecného trojuholníka sa rovná súčtu štvorcov zostrojených nad zvyšnými dvoma stranami zmenšenému o dvojnásobok súčinu týchto dvoch strán a kosínusu uhla, ktorý zvierajú.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

*** Podobnosť trojuholníkov:**

- Dva trojuholníky môžu byť zhodné (podobné) podľa troch viet o podobnosti: sss, sus, usu.

Veta (sss): Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú vo všetkých troch stranách, sú zhodné.

Veta (sus): Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom sú zhodné.

Veta (usu): Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej strane a dvoch uhloch k nej priľahlých sú zhodné.

Veta (Ssu): Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a uhle ležiacom oproti väčšej z nich, sú zhodné.

Štvoruholníky, mnohouholníky

Vysvetlite obsah pojmov: štvoruholník, rovnobežník, n - uholník. Charakterizujte štvorec, obdĺžnik, štvorec, lichobežník, kosoštvorec, kosodĺžnik. Popíšte základné prvky daných útvarov a uveďte základné vzťahy na výpočet obvodu a obsahu týchto útvarov.

Štvoruholník:

Štvoruholník je rovinný geometrický útvar, mnohouholník so **štyrmi vrcholmi a štyrmi stranami**.

Vlastnosti:

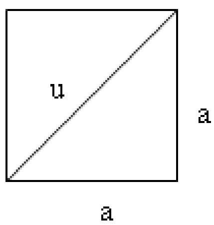
Súčet veľkostí vnútorných uhlov štvoruholníka je rovný 360° (2π), čo vyplýva z toho, že ho možno uhlopriečkou rozdeliť na dva trojuholníky.

Klasifikácia štvoruholníkov:

Štvoruholníky môžu byť konvexné (vypuklé) alebo nekonvexné (konkávne, vyduté). Konvexné sa ďalej delia na:

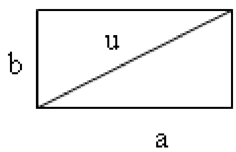
- **rôznobežník** – žiadne dve protiľahlé strany nie sú rovnobežné
- **rovnobežník** (**kosodĺžnik**) – dve a dve protiľahlé strany sú rovnobežné
- **obdĺžnik** – všetky vnútorné uhly sú pravé
- **kosoštvorec** – všetky strany majú rovnakú dĺžku
- **štvorec** – všetky strany majú rovnakú dĺžku a všetky vnútorné uhly sú pravé
- **lichobežník** – jeden pár protiľahlých strán je rovnobežný
- **deltoid** – dve dvojice vzájomne priliehajúcich strán majú rovnakú veľkosť

Štvorec



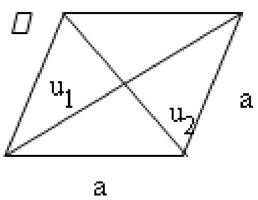
$$O = 4a$$
$$S = a^2$$
$$S = \frac{u^2}{2}$$
$$u = a\sqrt{2}$$

Obdĺžnik



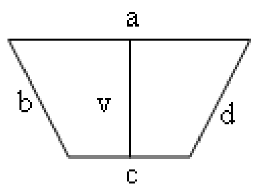
$$O = 2(a+b)$$
$$S = a.b$$
$$u^2 = a^2 + b^2$$

Kosoštvorec



$$O = 4.a$$
$$S = a^2 . \sin \alpha$$
$$S = \frac{u_1, u_2}{2}$$
$$a^2 = \left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{2}\right)^2$$

Lichobežník



$$O = a + b + c + d$$
$$S = \frac{(a+c)v}{2}$$

Mnohouholník alebo polygón alebo **n-uholník** je časť roviny vymedzená úsečkami, ktoré spájajú určitý počet bodov (najmenej tri), z ktorých žiadne tri susedné neležia na jednej priamke.

3.1 Kružnica a kruh

Objasnite pojmy: kružnica, kruh, polomer a priemer kružnice, stred, tetiva. Uveďte vzťahy pre výpočet obvodu kružnice a obsah kruhu. Klasifikujte vzájomné polohy kružnice a priamky, dvoch kružníc.

Kruh je množina bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od stredu kružnice je menšia alebo rovnaká ako polomer kružnice. Je to plocha ohraničená kružnicou vrátane nej samej.

Kružnica je podmnožina kruhu, je to hranica kruhu, sú to všetky body, ktoré tvoria okraj kruhu.

Kruh sú teda všetky body, ktorá ležia nie len na kružnici, ale aj vo vnútornom priestore, ktorý kružnica obklopuje.

Kružnica – k so stredom S a polomerom r nazývame množinou všetkých bodov X v rovine, ktoré majú od pevného bodu S konštantnú vzdialenosť /SX/ = r, kde $r \in R$; $r > 0$.

Zapisujeme k(S;r)

Polomer kružnice – vzdialenosť r = /SX/

Stred kružnice – S (pevný bod)

Tetiva – úsečka, ktorá spája dva rôzne body kružnice

Priemer – najdlhšia tetiva s dĺžkou 2r = d

Kruh – K so stredom S a polomerom r nazývame množinu všetkých bodov Y v rovine, ktoré majú od pevného bodu S vzdialenosť /SX/ ≤ r ; pričom $r \in R$, $r > 0$.

Zapisujeme K(S;r)

Dĺžka kružnice (obvod kruhu) $o = 2 \pi r$

Obsah kruhu $S = \pi r^2$

Vzájomná poloha kružnice a priamky :

Vzájomnú polohu kružnice a priamky skúmame prostredníctvom počtu ich spoločných bodov – môže byť 1, 2 alebo žiadny spoločný bod.

- **SEČNICA** – priamka p, ktorá ma s kružnicou k(S;r) 2 spločné body
- **DOTYČNICA** – priamka p, ktorá má s kružnicou k(S;r) jedniný spoločný bod T (T=bod dotyku, dotykový bod); zvyčajne sa označuje t
- **NESEČNICA** – priamka p, ktorá nemá s kružnicou k(S;r) žiadny spoločný bod

Vzájomná poloha dvoch kružníc:

Vzájomnú polohu dvoch kružníc skúmame tiež prostredníctvom počtu ich spoločných bodov, môže to byť 1, 2 alebo žiadny spoločný bod.

Ak $k_1(S_1;r_1)$ a $k_2(S_2;r_2)$ majú spoločných :

- **0 bodov –** hovoríme, že nemajú žiadny spoločný bod **–** k_1 leží mimo k_2 / k_2 leží vo vnútri k_1
- **1 bod –** hovoríme, že sa **dotýkajú –** (vnútorný alebo vonkajší dotyk)
- **2 body –** A;B **–** hovoríme, že sa v bodoch A;B **pretínajú**
- **nekonečne veľa spoločných bodov –** hovoríme že **splývajú –** $k_1=k_2$

KRUŽNICA, KRUH

KRUŽNICA

$O = 2 \cdot \pi \cdot r$

$S = \pi \cdot r^2$

π - iracionálne číslo

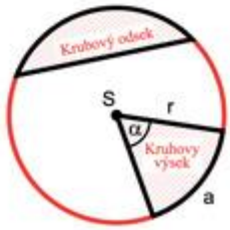
$\pi = 3{,}1415926535.. \approx 3{,}14$

KRUH

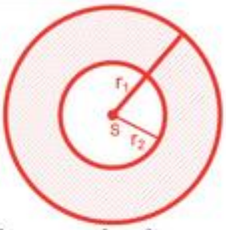
KRUŽNICOVÉ PRVKY

d-priemer
t-tetiva
a-kružnicový oblúk
r-polomer

$$S_{Kruh.výsek} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot \alpha$$



MEDZIKRUŽIE



$S = S_1 - S_2$

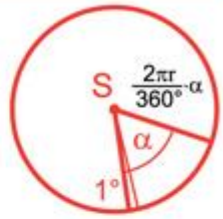
$S = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi (r_1^2 - r_2^2)$

DĹŽKA KRUŽNICOVÉHO OBLÚKA, STREDOVÝ UHOL

$\alpha = 1°$ $\quad a = \frac{2.\pi.r}{360°} \cdot 1°$

$\alpha = 75°$ $\quad a = \frac{2.\pi.r}{360°} \cdot 75°$

α $\quad a = \frac{2.\pi.r}{360°} \cdot \alpha$



OBVODOVÉ UHLY

Ostrý uhol

Pravý uhol (Talesova veta)

Tupý uhol