# 2.1 Funkcia a jej vlastnosti

## Funkcia, monotónna a prostá funkcia

Vysvetlite obsah pojmu: funkcia, funkčná hodnota, D(f), H(f), graf funkcie, monotónnosť funkcie, prostá funkcia. Demonštrujte uvedené vlastnosti na grafe ľubovoľnej funkcie f(x).

**Funkcia** – Funkcia priraďuje nejakému číslu práve jedno číslo, podľa nejakého pravidla. Dosadzované číslo **x**, voláme **premenná alebo argument**, priradené číslo **y alebo f(x) voláme funkčná hodnota čísla x.** Funkcia **f** reálnej premennej **x, je množina všetkých usporiadaných dvojíc [x, f(x)],** ak ku každému reálnemu číslu x **existuje najviac jedno reálne číslo f(x).**

**Funkčná hodnota:**

Nech je daná funkcia f: y=2x+3

Chceme určiť funkčnú hodnotu funkcie f v bode -1, takže dosadíme do predpisu funkcie namiesto x číslo -1 a tak vypočítame, že f(-1) = 2.(-1)+3 = 1.

Odpoveď: Funkčná hodnota v bode -1 je 1. Zapíšeme f(-1) = 1.

**Definičný obor – D(f)** – množina všetkých x, ku ktorým existuje práve jedno f(x)

**Obor hodnôt – H(f)** – množina všetkých f(x)

**Graf funkcie f** - je množina všetkých dvojíc [x, f(x)] (pričom x patrí do definičného oboru funkcie f) a/alebo grafické znázornenie týchto dvojíc (teda bodov) v súradnicovej sústave.

**Monotónnosť funkcie** - monotónne funkcie na množine M zaraďujeme všetkých 5 typov – rastúcu, klesajúcu, nerastúcu, neklesajúcu a konštantnú funkciu. Cudzie slovo monotónne totiž znamená v určitom zmysle rovnaké, jednotné.

Funkcia f sa nazýva **rastúca** funkcia na množine M ⊂ D práve vtedy, keď pre každé dva prvky x1, x2 ∈ M platí: $\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$

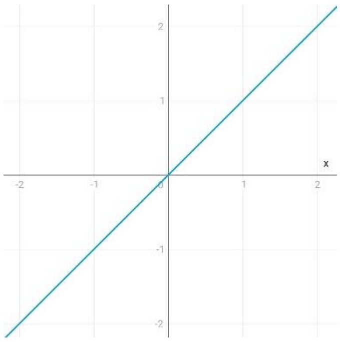
Funkcia f sa nazýva **klesajúca** funkcia na množine M ⊂ D práve vtedy, keď pre každé dva prvky x1, x2 ∈ M platí: $\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$

Funkcia f sa nazýva **neklesajúca** funkcia na množine M ⊂ D práve vtedy, keď pre každé dva prvky x1, x2 ∈ M platí: $\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$

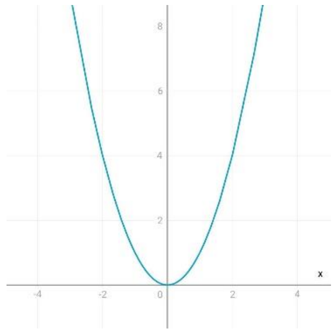
Funkcia f sa nazýva **nerastúca** funkcia na množine M ⊂ D práve vtedy, keď pre každé dva prvky x1, x2 ∈ M platí: $\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$

Funkciu nazývame **konštantnou** na množine M ⊂ D práve vtedy, ak ∀x1, x2 ∈ M platí f(x1) = f(x2).
Funkcia je **prostá** ak: $\mathbf{x_1 \neq x2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)}$

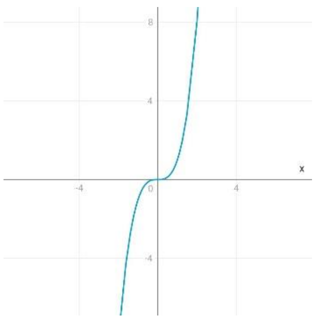
**Demonštrujte uvedené vlastnosti na grafe ľubovoľnej funkcie f(x):**



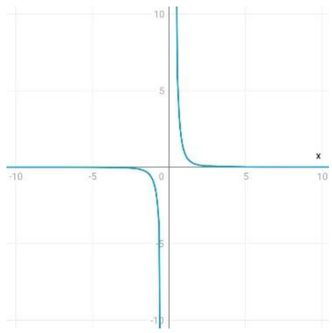
$y = x$ – rastúca na celom D(f)



$y = x^2$ – rast: $(-\infty, 0)$ klesanie: $(0, \infty)$



$y = x^3$ – rastúca



$y = x^{-3} \Leftrightarrow y = 1/x^3$ – klasajúca na: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

## Funkcia, vlastnosti funkcie

Vysvetlite obsah pojmov funkcia, funkčná hodnota. Vysvetlite na konkrétnych príkladoch vlastnosti funkcií ako párnosť/nepárnosť, monotónnosť, ohraničenosť, extrémy a periodičnosť.

**Funkcia** – Funkcia priraďuje nejakému číslu práve jedno číslo, podľa nejakého pravidla. Dosadzované číslo **x**, voláme **premenná alebo argument**, priradené číslo **y alebo f(x) voláme funkčná hodnota čísla x.** Funkcia **f** reálnej premennej **x, je množina všetkých usporiadaných dvojíc [x, f(x)],** ak ku každému reálnemu číslu x **existuje najviac jedno reálne číslo f(x).**

**Funkčná hodnota:**

Nech je daná funkcia f: y=2x+3

Chceme určiť funkčnú hodnotu funkcie f v bode -1, takže dosadíme do predpisu funkcie namiesto x číslo -1 a tak vypočítame, že f(-1) = 2.(-1)+3 = 1.

Odpoveď: Funkčná hodnota v bode -1 je 1. Zapíšeme f(-1) = 1.

**Vlastnosti funkcií:**

**Párna**: f(x) = f(-x) – osovo súmerná podľa osi y    f: $y = x^2 - 1$, f: y = |x|, f: $y = 1/x^2$

**Nepárna**: -f(x) = f (-x) – osovo súmerná podľa stredu súradnic. súst.    f: $y = x^3$, f: y = 2x, f: y = 1/x

**Monotónnosť:**

**rastúca:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$    f: $y = x^3$, f: y = 2x

**klesajúca**: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$    f: $y = - x^3$, f: y = - 2x

**neklesajúca**: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

**nerastúca**: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

**konštantnou**: $x_1 \neq x2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$    f: y = 6, f: y = 5x/x, f: $y = x^0 - 3$

**Ohraničenosť:**

**zdola ohraničená:** existuje také reálne číslo d, že pre všetky x z definičného oboru funkcie f platí: **d ≤ f(x)**    $\exists d, d \in R \wedge \forall x, x \in D(f) : d \leq D(f)$

**zhora ohraničená**: existuje také reálne číslo h, že pre všetky x z definičného oboru funkcie f platí: **h ≥ f(x)**    $\exists h, h \in R \wedge \forall x,\ x \in D(f) : h \geq D(f)$

**ohraničená:** ak je zdola a aj z hora ohraničená

**Extrémy:**

**maximum:** funkcia f má v bode $x_0$ maximum, ak pre všetky x z D(f) funkcie platí:

$\mathbf{f(x_0) \geq f(x)}$    f: $y = - x^2 - 1$, f: y = -|x|, f: $y = - 1/x^2$

**minimum**: funkcia f má v bode $x_0$ minimum, ak pre všetky x z D(f) funkcie platí:

$\mathbf{f(x_0) \leq f(x)}$    f: $y = x^2 - 1$, f: y = |x|, f: $y = 1/x^2$

- toto sú tzv. **globálne** maximá a minimá pretože platia pre celý D(f)

- existuje aj **lokálne** maximum a minimum: ak vzťah $f(x_0) \geq f(x)$ alebo $f(x_0) \leq f(x)$ neplatí pre všetky x z D(f) ale iba pre x z nejakej podmnožiny D(f) jedná sa o lokálne max alebo min

**Periodičnosť:** Periodická funkcia je funkcia, ktorá sa neustále opakuje v pravidelných intervaloch a periódach. f: y = sin x, f: y = cos x

Funkciu f nazývame periodická funkcia práve vtedy, keď existuje také reálne číslo **p≠0**, že pre každé **x ∈ D(f) je aj x ± p ∈ D(f)** a platí: **f(x ± p) = f(x)**

Číslo **p** nazývame perióda funkcie f.

Ak má daná funkcia f **periódu p**, ľahko dokážeme, že pre každé celé číslo **k** platí: **f(x + kp) = f(x).** Teda daná funkcia má i periódu **kp**.

**Dôkaz:** V(k): f(x + kp) = f(x)

1. Predpokladáme, že pre k = 1 platí V(1): f(x ± p) = f(x)

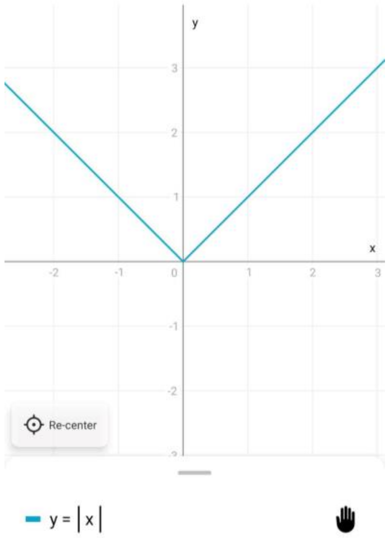
2. Dokážeme platnosť implikácie V(k) ⇒ V(k+1):

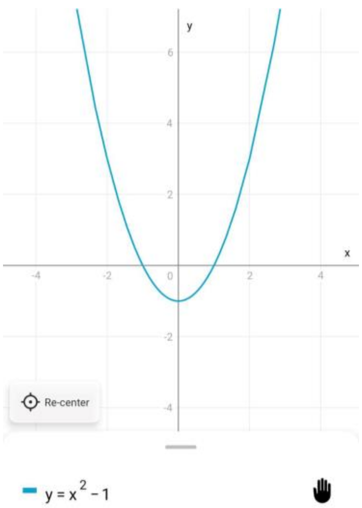
V(k): f(x + kp) = f(x) … indukčný predpoklad

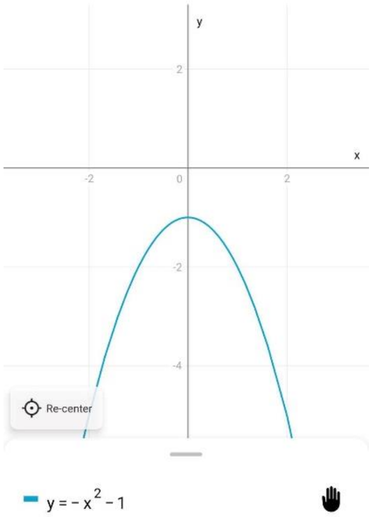
V(k+1): f(x + (k+1)p) = f(x + p + kp) = f(x + kp) = f(x)

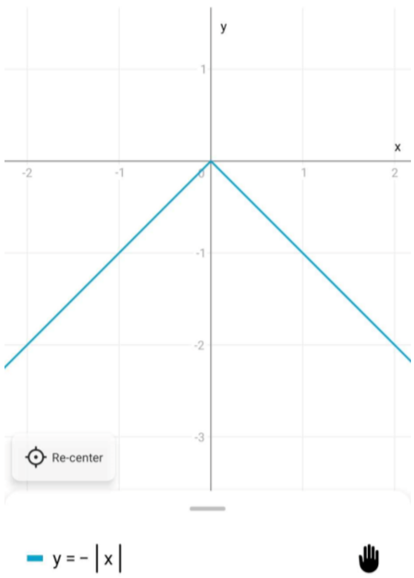
Takže implikácia V(k) ⇒ V(k+1) je pravdivý výrok, preto platí:

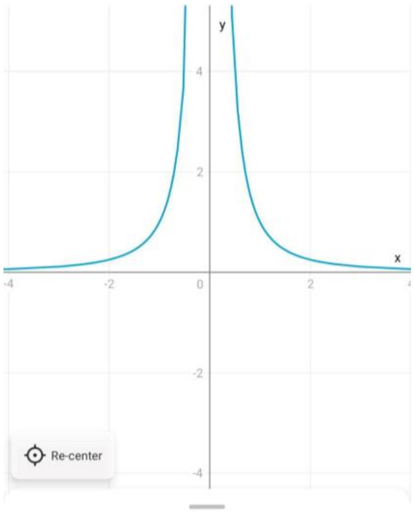
Ak má funkcia f periódu p, potom má aj periódu kp, kde k∈Z.



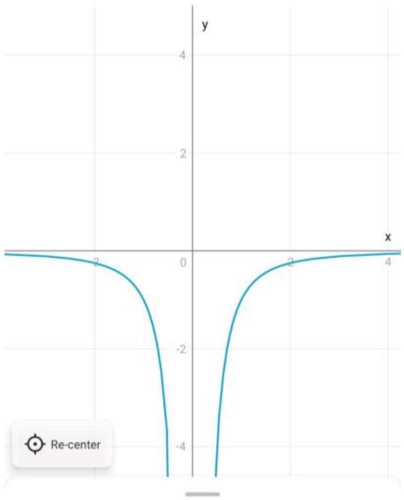



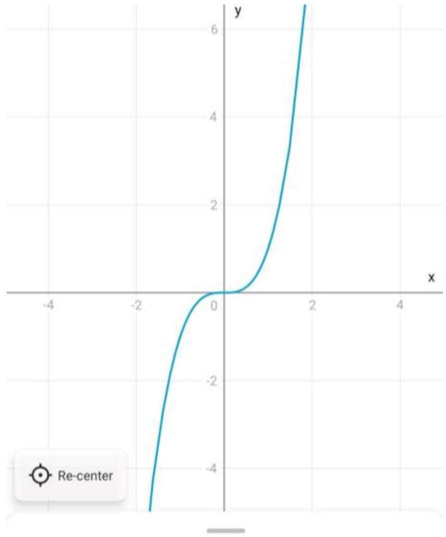





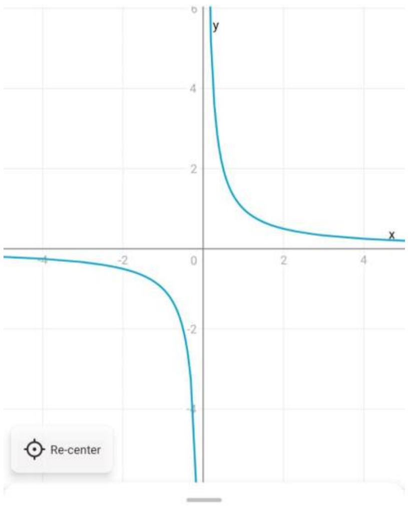

$y = \frac{1}{x^2}$



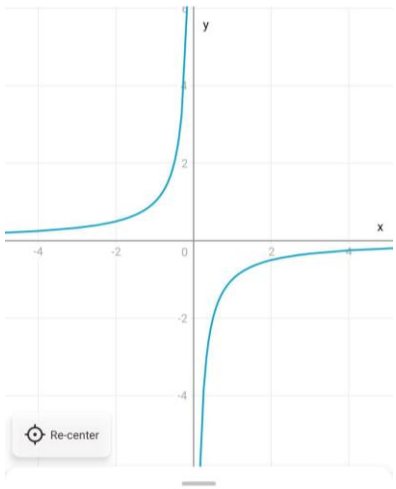

$y = -\frac{1}{x^2}$



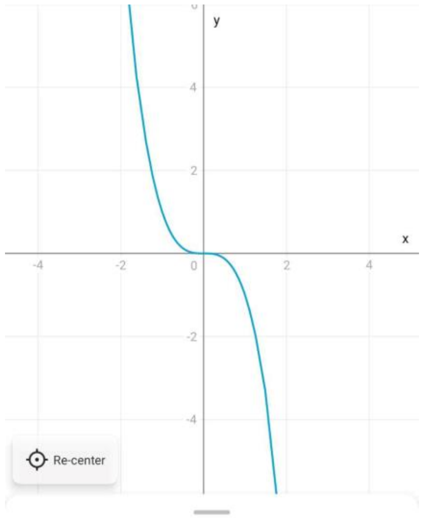

$y = x^3$



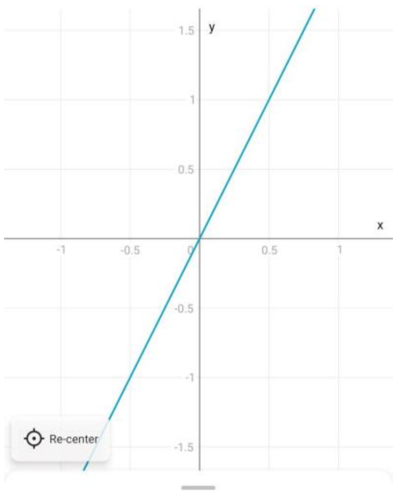

$y = \frac{1}{x}$



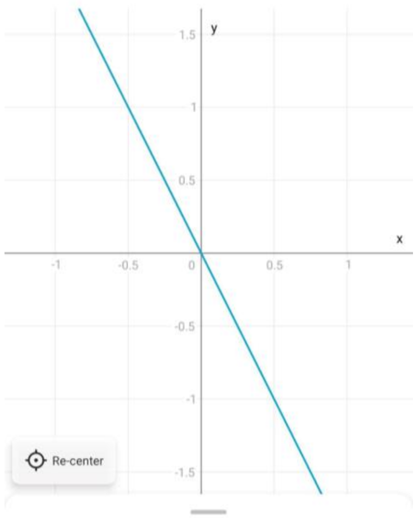

$y = -\frac{1}{x}$



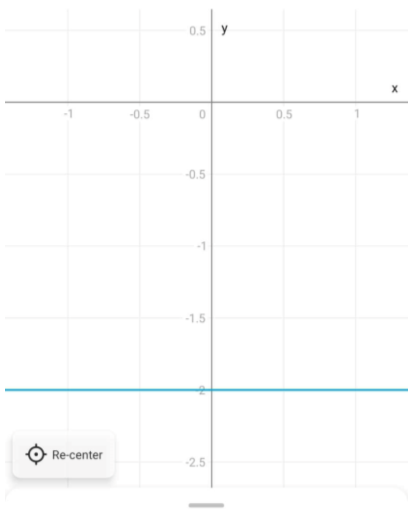

$y = -x^3$




$y = 2x$




$y = -2x$




$y = x^0 - 3$

## Funkcia, prostá a inverzná funkcia

Vysvetlite obsah pojmu funkcia, funkčná hodnota, D(f), H(f). Charakterizujte pojmy prostá funkcia, inverzná funkcia. Objasnite dané pojmy na konkrétnom príklade. Popíšte súvislosť medzi definičným oborom a oborom hodnôt funkcie f a k nej inverznej funkcie.

**Funkcia** – Funkcia priraďuje nejakému číslu práve jedno číslo, podľa nejakého pravidla. Dosadzované číslo **x**, voláme **premenná alebo argument**, priradené číslo **y alebo f(x) voláme funkčná hodnota čísla x.** Funkcia **f** reálnej premennej **x, je množina všetkých usporiadaných dvojíc [x, f(x)],** ak ku každému reálnemu číslu x **existuje najviac jedno reálne číslo f(x).**

**Funkčná hodnota:**

Nech je daná funkcia f: y=2x+3

Chceme určiť funkčnú hodnotu funkcie f v bode -1, takže dosadíme do predpisu funkcie namiesto x číslo -1 a tak vypočítame, že f(-1) = 2.(-1)+3 = 1.

Odpoveď: Funkčná hodnota v bode -1 je 1. Zapíšeme f(-1) = 1.

**Definičný obor – D(f)** – množina všetkých x, ku ktorým existuje práve jedno f(x)

**Obor hodnôt – H(f)** – množina všetkých f(x)

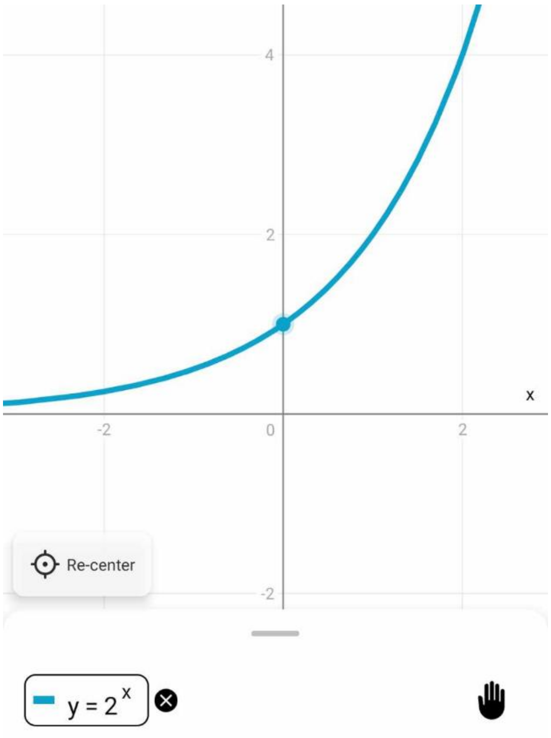
**Prostá funkcia**: $x_1 \neq x2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

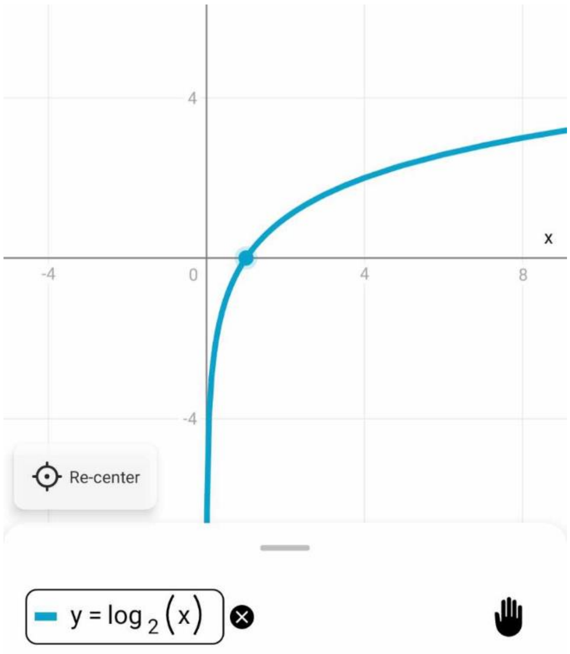
**Inverzná funkcia**: (označenie: $\mathbf{f^{-1}}$ ) vymieňa súradnice bodov pôvodnej funkcie $\mathbf{f^{-1}: (f(x))=x}$

**-** exponenciálna ($y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$) a logaritmická ($y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$) funkcia sú navzájom inverzné

| **Exponenciálna funkcia** | **Logaritmická funkcia** |
|---|---|
| D(f) = R | D(f) = (0, ∞) |
| H(f) = (0, ∞) | H(f) = R |
| Os y pretne v bode [0, 1] | Os y nepretne |
| Os x nepretne | Os x pretne v bode [0, 1] |
| Je zdola ohraničená | Nie je ohraničená ani z dola, ani z hora |
| Nemá minimum | Nemá min ani max |
| O monotónnosti rozhoduje základ | O monotónnosti rozhoduje základ |

**súvislosť medzi definičným oborom a oborom hodnôt funkcie f a k nej inverznej funkcie:** vymenia sa, keďže sa menia x za y a naopak


4
2
-2
0
2
x
-2
Re-center
y = 2^x


4
x
-4
0
4
8
-4
Re-center
y = log 2 (x)

## Funkcia, spôsoby určenia funkcie

Vysvetlite obsah pojmu funkcia, funkčná hodnota, D(f), H(f). Na konkrétnych príkladoch objasnite rozdiel medzi určením funkcie množinou usporiadaných dvojíc, tabuľkou, rovnicou y=f(x) a grafickým určením.

**Funkcia** – Funkcia priraďuje nejakému číslu práve jedno číslo, podľa nejakého pravidla. Dosadzované číslo **x**, voláme **premenná alebo argument**, priradené číslo **y alebo f(x) voláme funkčná hodnota čísla x.** Funkcia **f** reálnej premennej **x, je množina všetkých usporiadaných dvojíc [x, f(x)],** ak ku každému reálnemu číslu x **existuje najviac jedno reálne číslo f(x).**

**Funkčná hodnota:**

Nech je daná funkcia f: y=2x+3

Chceme určiť funkčnú hodnotu funkcie f v bode -1, takže dosadíme do predpisu funkcie namiesto x číslo -1 a tak vypočítame, že f(-1) = 2.(-1)+3 = 1.

Odpoveď: Funkčná hodnota v bode -1 je 1. Zapíšeme f(-1) = 1.

**Definičný obor – D(f)** – množina všetkých x, ku ktorým existuje práve jedno f(x)

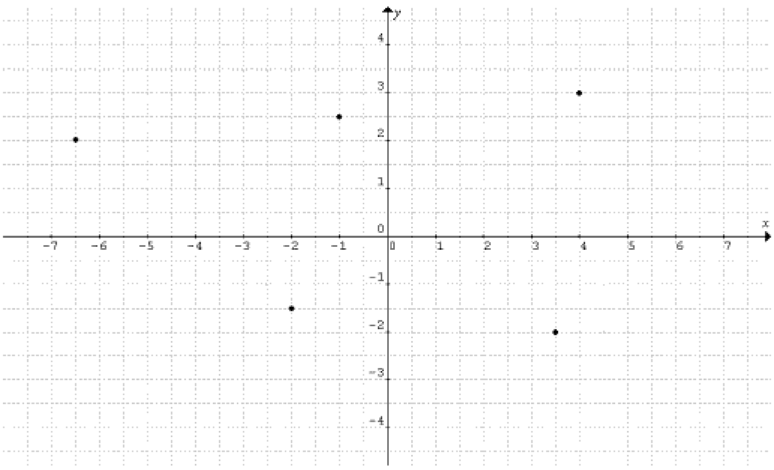
**Obor hodnôt – H(f)** – množina všetkých f(x)

V rovine si zvolíme pravouhlú sústavu súradníc so začiatkom O a osami x, y. Pre všetky x∈D(f) priradíme každej usporiadanej dvojici (x, f(x)) bod v rovine so súradnicami x, y=f(x).

Napríklad funkcia f je daná ako **množina usporiadaných dvojíc**:

**{(-6,5; 2), (-2; -1,5), (-1; 2,5), (3,5; -2), (4; 3)}.**

**Graf** tejto funkcie bude vyzerať nasledovne:



**Funkcia môže byť daná:**

**analyticky** – vzorcom, t.j. rovnicou v tvare y = f(x), kde f(x) je výraz s premennou x, napr. y = 2x – 7 alebo y = x + $\sqrt{x-3}$

**graficky** – grafom funkcie

**vymenovaním usporiadaných dvojíc** – spravidla vo forme tabuľky. Tento spôsob je použiteľný jedine pre funkcie, ktorých definičným oborom je konečná množina.

- **najpresnejšie** určenie je **analytické,** teda rovnicou **y=f(x) – graf** bude nejaká **krivka**

**- menej** presné je **vymenovanie usporiadaných dvojíc – grafom** sú len dané **body**