1.4 Rovnice, nerovnice, sústavy – vzory teoretických zadaní

Úpravy rovníc a nerovníc

Vysvetlite pojmy: rovnica, nerovnica, koreň rovnice. Vysvetlite rozdiel medzi ekvivalentnými a dôsledkovými úpravami rovníc a nerovníc. Objasnite, načo slúži skúška správnosti a pri ktorých úpravách je nutné ju používať.

Rovnica *- je vzťah rovnosti medzi dvoma algebrickými výrazmi, dá sa do nej dosadiť len niekoľko špecifických hodnôt.*

Nerovnica *- je vzťah nerovnosti medzi dvoma algebrickými výrazmi, pri ktorých sa hľadajú všetky čísla danej množiny, ktoré spĺňajú danú nerovnosť.*

Koreň *- je množina všetkých čísel, ktoré môžeme dosadiť za neznámu/neznáme ronvnice a rovnica sa bude skutočne rovnať. Označuje sa ako „K = {...}“.*

1. Ekvivalentné *= medzi rovnicami platí ekvivalencia. Napr.;* $x + 3 = 11 \Leftrightarrow x = 8$

sú napríklad:

- *Výmena strán rovnice*
- *Pripočítanie reálneho čísla k obom stranám rovnice*
- *Pripočítanie výrazu , ktorý je definovaný na definičnom obore rovnice k obom stranám rovnice*
- *Vynásobenie obph dtrán rovnice nenulovým reálnym číslom*

2. Neekvivalentné *= medzi rovnicami platí iba impikácia. Napr.;* $x = 6 \Rightarrow x^2 = 36$

sú napríklad:

- *Umocnenie oboch strán rovnice*
- *Vynásobenie (vydelenie) oboch strán rovnice výrazom, ktorý obsahuje neznámu*

Kontrola/skúška riešenia *- je keď koreň rovnice dosadíme do rovnice a zisťujeme či sa ľavá strana rovná pravej. Výsledok skúšky nám ukazuje správnosť nášho výsledku. Používa sa pri dôsledkových úpravách.*

Lineárna rovnica

Definujte pojem lineárna rovnica, ekvivalentné úpravy, obor premennej, definičný obor, obor koreňov. Diskutujte o možnom počte riešení lineárnej funkcie. Vysvetlite čo znamená riešiť lineárnu rovnicu graficky (súvis medzi lineárnou rovnicou a lineárnou rovnicou).

Lineárna rovnica *je rovnica, ktorá obsahuje na oboch stranách iba sumu konštánt a prvú mocninu premennej. Lineárna rovnica reprezentuje v sústave karteziánskych súradníc priamku.*

Ekvivalentné úpravy *= medzi rovnicami platí ekvivalencia. Napr.;* $x + 3 = 11 \Leftrightarrow x = 8$

sú napríklad:

- *Výmena strán rovnice*
- *Pripočítanie reálneho čísla k obom stranám rovnice*
- *Pripočítanie výrazu , ktorý je definovaný na definičnom obore rovnice k obom stranám rovnice*
- *Vynásobenie obph dtrán rovnice nenulovým reálnym číslom*

Obor premennej *sú všetky čísla, ktoré môžeme za premennú dosadiť bez ohľadu na to, či bude mať výraz zmysel. Obor premennej vymedzuje zadávateľ úlohy a ak tak neurobí, tak je to množina všetkých reálnych čísel.*

Premenná môže byť z oboru:

N- prirodzené čísla {1,2,3,...}

Z- celé čísla {...,-2,-1,0,1,2,...}

Q- racionálne čísla- dajú sa zapísať v tvare zlomku...

I- iracionálne čísla

R- reálne čísla{Q+I}

C- komplexné čísla

Definičný obor *alebo* ***obor definície zobrazenia*** *sú všetky prvky množiny, z ktorej sa zobrazuje. Ak použijeme terminológiu funkcií, je to množina všetkých nezávisle premenných, pre ktoré je funkcia definovaná.*

Množinu všetkých riešení rovnice (nerovnice) nazývame ***množina koreňov*** *alebo obor pravdivosti a túto množinu označujeme* ***K****.*

Lineárnou rovnicou s neznámou x nazývame každú rovnicu tvaru ax + b = 0, kde a, b sú reálne čísla a a ≠ 0.

Pri riešení môžu nastať 3 prípady:

- *ak **$a \neq 0$**, potom $ax = -b$ a rovnica má práve jeden koreň $x = -b/a$;*
- *ak **$a = b = 0$**, po úprave dostaneme $0 = 0$ a to je pravdivý výrok (rovnosť), takže pôvodná rovnica má nekonečne veľa riešení resp. koreňom tejto rovnice je každé reálne číslo;*
- *ak **$a = 0, b \neq 0$**, po úprave dostaneme $0 = -b$, a keďže $b \neq 0$, tak sme dostali nepravdivú rovnosť – pôvodná rovnica nemá žiadne riešenie.*

Uvažujme o sústave dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, ktorú môžeme v základnom tvare zapísať napríklad takto:

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$,

pričom a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 sú reálne koeficienty. Z každej z týchto rovníc vyjadri y.

V prvej rovnici, dostanem vyjadrenie:

$$y = \frac{a1}{b1}x + \frac{c1}{b1}$$

Z druhej rovnice dostanem:

$$y = \frac{a2}{b2}x + \frac{c2}{b2}$$

- *vyzerá to ako rovnica lineárnej funkcie*
- *dokážeme sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi prepísať do tvaru sústavy dvoch lineárnych funkcií*
- ***grafom lineárnej funkcie je priamka***
- ***$y = c$** je rovnica konštantnej funkcie. Jej grafom je priamka rovnobežná s osou x*
- ***$x = c$** všetky body, ktoré majú rovnakú x-ovú súradnicu ležia na priamke rovnobežnej s osou y. Lenže tá nepredstavuje graf funkcie*
- *každej rovnici vieme priradiť priamku, teda na obrázku nám vzniknú dve priamky – jednoducho sa pozrieme, kde sa tie dve priamky preťali a budeme mať výsledok*
- ***priesečník** - bod, ktorý leží na oboch grafoch, teda **jeho súradnice vyhovujú obom daným rovniciam***

Kvadratická rovnica a nerovnica 1

Vysvetlite, čo znamená riešiť kvadratickú rovnicu a kvadratickú nerovnicu. Vysvetlite aký je vzťah medzi koreňmi a koeficientami v kvadratickej rovnici. Demonštrujte na konkrétnom príklade.

a.x ^{2} + b.x + c = 0 - KVARO

Typy kvadratických rovníc:

rýdzo kvadratická rovnica má tvar $ax^2 + c = 0$

kvadratická rovnica bez absolútneho člena $ax^2 + bx = 0$

normovaný tvar kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$

Riešenie kvadratickej rovnice : *$D = b^2 - 4ac$ D - diskriminant kvadratickej rovnice*

*Ak **D < 0** rovnica nemá riešenie v množine reálnych čísel*

*Ak sa **D = 0** má rovnica 1 riešenie (dvojnásobný koreň)*

*Ak **D > 0** kvadratická rovnica má 2 reálne riešenia*

$$x1{,}2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

V množine reálnych čísel R riešte:

$3x^2 - 7x + 4 \le 0$

SKRY RIEŠENIE ZOBRAZ VŠETKY RIEŠENIA

Riešenie:

$3x^2 - 7x + 4 \le 0$

$3(x-1)(x-\frac{4}{3}) \le 0$

$(x-1)(x-\frac{4}{3}) \le 0$

$\left[x-1 \le 0 \wedge x-\frac{4}{3} \ge 0\right] \vee \left[x-1 \ge 0 \wedge x-\frac{4}{3} \le 0\right]$

$\left(x \le 1 \wedge x \ge \frac{4}{3}\right) \vee \left(x \ge 1 \wedge x \le \frac{4}{3}\right)$

$I_1 = \varnothing$.................. $I_2 = \left\langle 1; \frac{4}{3} \right\rangle$

$\underline{\underline{K = \left\langle 1; \frac{4}{3} \right\rangle}}$

Vzťah koreň a koeficient:

Ak má kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in R$, $(a \neq 0)$,korene x_1, x_2, tak pre ne platí :

$x_1 + x_2 = -b/a$, (Vietove vzorce)

$x_1 \cdot x_2 = c/a$

$$2x^2 + 4b - 6 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 * 2 * (-6) = 16 + 48 = 64$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$x1{,}2 = \frac{-4 \pm 8}{4} \qquad x1 = \frac{4}{4} = 1 \qquad x2 = \frac{-12}{4} = -3 \qquad K = \{-3, 1\}$$

$$1 + (-3) = -\frac{4}{2} \qquad -2 = -2$$

$$1 * (-3) = -\frac{6}{2} \qquad -3 = -3$$

Kvadratická rovnica a nerovnica 2

Vysvetlite pojmy: kvadratická rovnica a kvadratická nerovnica. Popíšte riešenie úplnej a neúplnej kvadratickej rovnice. Vysvetlite, ako postupujeme pri riešení kvadratickej nerovnice.

***Kvadratická rovnica** alebo **algebrická rovnica druhého stupňa** je matematická rovnica, ktorá má nasledujúci všeobecný tvar:* $ax^2+bx+c=0$

$$a_1\,x_1^2 + a_2\,x_2^2 + \cdots + b_1\,x_1 + b_2x_2 + \cdots + c = 0$$

Kvadratická rovnica v užšom zmysle je kvadratická rovnica len s jednou neznámou.

neúplná kvadratická rovnica

- *bez lineárneho člena* $\boldsymbol{ax^2+c=0}$

$$x^2-4=0$$
$$x^2=4$$
$$|x|=2$$
$$x=\pm 2$$

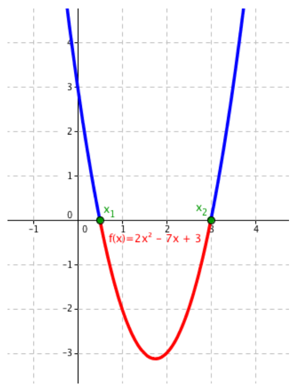
- *bez absolútneho člena* $\boldsymbol{ax^2+bx=0}$

$$x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0$$
$$x=0 \qquad x-4=0$$
$$x=4$$

***Kvadratickou nerovnici** můžeme zapsat v obecném tvaru takto:* $ax^2 + bx + c > 0$ *nebo* $ax^2 + bx + c < 0$*, kde a, b, c jsou libovolná reálná čísla,* $a \neq 0$*. Namísto „větší než“ a „menší než“ samozřejmě můžeme použít „větší nebo rovno“ a „menší nebo rovno“.*

$2x^2 - 7x + 3 < 0$

$D = 25$ $\qquad x_{1,2} = \frac{7\pm 5}{4}$ $\qquad x_1=1/2,\ x_2=3$



Tyto dva kořeny nám rozdělují graf funkce $2x^2 - 7x + 3$ *na tři intervaly:*

$(-\infty, \frac{1}{2})$ *v tomto intervalu jsou hodnoty kladné (graf je „nad“ osou x)*

$(\frac{1}{2}, 3)$ *v tomto intervalu jsou hodnoty záporné (graf je „pod“ osou x)*

$(3, \infty)$ *v tomto intervali jsou opět hodnoty kladné*

Všimněte si, že v intervalech používáme kulaté závorky, které značí otevřený interval. To znamená, že čísla 3 ani 1/2 nejsou obsaženy v intervalu $(\frac{1}{2}, 3)$*. Je to proto, že v bodě x = 3 má funkce hodnotu nula, a my jsme chtěli vypsat interval, ve kterém jsou hodnoty menší než nula.*

Nyní už známe všechny potřebné informace k tomu, abychom určili výsledek nerovnice $2x^2 - 7x + 3 < 0$*. Ptáme se, kdy jsou hodnoty funkce* $2x^2 - 7x + 3$ *menší než nula? Jsou menší než nula v intervalu* $(\frac{1}{2}, 3)$*.*

Kvadratická rovnica a kvadratická funkcia

Vysvetlite obsah pojmov kvadratická rovnica, korene rovnice, úprava rovnice na súčin, diskriminant. Urobte diskusiu o závislosti veľkosti diskriminantu a počtu koreňov kvadratickej rovnice od grafu kvadratickej funkcie na konkrétnom prípade.

Kvadratická rovnica *alebo* ***algebrická rovnica druhého stupňa*** *je matematická rovnica, ktorá má nasledujúci všeobecný tvar:* $ax^2+bx+c=0$

Koreň *- je množina všetkých čísel, ktoré môžeme dosadiť za neznámu/neznáme ronvnice a rovnica sa bude skutočne rovnať. Označuje sa ako „K = {...}“.*

Úprava na súčin *- je rozloženie výrazov na súčin.*

1. Vyňatím člena (jednočlena alebo dvojčlena) pred zátvorku

Najväčšieho spoločného deliteľa všetkých členov mnohočlena (koeficienty aj premenné) napíšeme pred zátvorku. V zátvorke ostanú členy, ktoré sme týmto deliteľom vydelili. Hovoríme že sme mnohočlen upravili na súčin.

2. Pomocou algebrických výrazov

V matematike pracujeme s rôznymi vzorcami. V algebre medzi základné vzorce patria:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 = aa + ab + ba + bb$$

$$(a-b)^2 = (a+b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 = aa - ab - ba + bb$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = aa + ab - ba - bb$$

Diskriminant *prislúchajúci polynómu je číslo, ktoré je súčasťou riešenia, respektíve hľadania koreňov polynómu. Diskriminantom sa zväčša myslí diskriminant kvadratickej rovnice. Diskriminanty polynómov vyšších rádov než kvadratických sú obtiažnejšie zapamätateľné pre svoj zložitý predpis.*

Ak ***D < 0*** *rovnica nemá riešenie v množine reálnych čísel*

Ak sa ***D = 0*** *má rovnica 1 riešenie (dvojnásobný koreň)*

Ak ***D > 0*** *kvadratická rovnica má 2 reálne riešenia*

Sústavy lineárnych rovníc 1

Vysvetlite pojem sústava lineárnych rovníc. Uveďte a demonštrujte základné metódy algebrického riešenia sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi. Vysvetlite, čo znamená riešiť sústavu graficky.

*V matematike a v lineárnej algebre sa ako **Sústava lineárnych rovníc** označuje množina lineárnych rovníc. Napríklad*

$$\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\\
&2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2\\
&-x_1 + 3x_2 - x_3 = 0
\end{aligned}$$

Úlohou pri riešení je nájsť také hodnoty x1, x2 a x3 pre ktoré platia všetky rovnice zároveň.

Pri riešení sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi využívame 3 metódy:

- *dosadzovaciu (substitučnú) metódu*
- *sčítaciu (adičnú) metódu*
- *porovnávaciu (komparačnú) metódu*

Dosadzovacia (substitučná) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že z jednej rovnice si vyjadríme jednu neznámu a výraz ktorý takto dostaneme, dosadíme za túto neznámu do druhej rovnice.

Takto dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Následne dosadením vypočítame i druhú neznámu.

Sčítacia (adičná) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že každú rovnicu po úprave na základný tvar napr. 2x+3y=4

vhodne násobíme tak, aby po sčítaní oboch rovníc jedna neznáma „vypadla“.

Takto dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Pri „čistej“ sčítacej metóde to isté vykonáme i s druhou neznámou. V praxi je často využívaná kombinácia sčítacej a dosadzovacej metódy, čiže jednu neznámu určíme sčítacou metódou a druhú dosadením už známej hodnoty do niektorej z rovníc.

Porovnávacia (komparačná) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že z oboch rovníc si vyjadríme tú istú neznámu. Získané výrazy porovnáme a tak dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Následne dosadením vypočítame i druhú neznámu.

Sústavy lineárnych rovníc 2

Vysvetlite pojem sústava dvoch rovníc s dvomi neznámymi, úpravy rovníc, skúška rovníc, zápis riešenia sústavy rovníc. Uveďte metódy riešenia sústav rovníc, ktoré objasnite na uvedenom príklade.

*Uvažujme o sústave **dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi**, ktorú môžeme v základnom tvare zapísať napríklad takto:*

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$,

pričom a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 *sú reálne koeficienty. Z každej z týchto rovníc vyjadri y.*

V prvej rovnici, dostanem vyjadrenie:

$$y = \frac{a1}{b1}x + \frac{c1}{b1}$$

Z druhej rovnice dostanem:

$$y = \frac{a2}{b2}x + \frac{c2}{b2}$$

- *vyzerá to ako rovnica lineárnej funkcie*
- *dokážeme sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi prepísať do tvaru sústavy dvoch lineárnych funkcií*
- ***grafom lineárnej funkcie je priamka***
- ***y = c*** *je rovnica konštantnej funkcie. Jej grafom je priamka rovnobežná s osou x*
- ***x = c*** *všetky body, ktoré majú rovnakú x-ovú súradnicu ležia na priamke rovnobežnej s osou y. Lenže tá nepredstavuje graf funkcie*
- *každej rovnici vieme priradiť priamku, teda na obrázku nám vzniknú dve priamky – jednoducho sa pozrieme, kde sa tie dve priamky preťali a budeme mať výsledok*
- ***priesečník** - bod, ktorý leží na oboch grafoch, teda **jeho súradnice vyhovujú obom daným rovniciam***

Pri riešení sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi využívame 3 metódy:

- *dosadzovaciu (substitučnú) metódu*
- *sčítaciu (adičnú) metódu*
- *porovnávaciu (komparačnú) metódu*

***1. Ekvivalentné úpravy** = medzi rovnicami platí ekvivalencia. Napr.;* $x + 3 = 11$ ⇔ $x = 8$

sú napríklad:

- *Výmena strán rovnice*
- *Pripočítanie reálneho čísla k obom stranám rovnice*
- *Pripočítanie výrazu , ktorý je definovaný na definičnom obore rovnice k obom stranám rovnice*

- *Vynásobenie obph dtrán rovnice nenulovým reálnym číslom*

2. Neekvivalentné úpravy *= medzi rovnicami platí iba impikácia. Napr.; $x = 6$ □ $x^2 = 36$*

sú napríklad:

- *Umocnenie oboch strán rovnice*
- *Vynásobenie (vydelenie) oboch strán rovnice výrazom, ktorý obsahuje neznámu*

Kontrola/skúška riešenia *- je keď koreň rovnice dosadíme do rovnice a zisťujeme či sa ľavá strana rovná pravej. Výsledok skúšky nám ukazuje správnosť nášho výsledku. Používa sa pri dôsledkových úpravách.*

zápis riešenia sústavy rovníc: *$K = \{[x_1, y_1], [x_2, y_2]\}$*