1.2 Čísla, premenné, výrazy

Mocniny

Vysvetlite pojem odmocnina (druhá), n-tá odmocnina, mocnina (s prirodzeným, celočíselným, racionálnym exponentom), exponent a základ mocniny. Doplňte vzťahy pre počítanie s mocninami:

$a^r . a^s =$, $\frac{a^r}{a^s} =$, $\left(a^r\right)^s =$, $(a.b)^r =$, $\left(\frac{a}{b}\right)^r =$

Odmocnina (druhá) – $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ - je špeciálnym typom všeobecnej odmocniny. Ide o najbežnejší typ odmocniny, preto sa často označuje iba ako odmocnina. Pre ľubovoľný matematický objekt s definovanou operáciou umocňovania (číslo, maticu, funkciu...) je druhá odmocnina z *a*, označovaná ako $\sqrt{a}$ definovaná ako objekt *b*, pre ktorý platí $b^2 = a$

n-tá odmocnina – z čísla x ($\sqrt[n]{x}$) je také číslo y, pre ktoré platí, že *y . y . … . y = x*, kde y sa v súčine vyskytuje n-krát. Odmocnina je inverznou funkciou k mocnine. Platí, že n-tá odmocnina čísla x sa rovná 1/n-tej mocnine čísla x: $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$ Mocnina = Výsledok Umocňovania

Mocnina (s prirodzeným, celočíselným, racionálnym exponentom)

Mocniny s prirodzeným exponentom - Zapisujeme ju a^n, kde a je reálne číslo, n prirodzené číslo; a nazývame základ mocniny, n mocniteľ. Výraz a^n nazývame n-tá mocnina čísla a môžeme ho rozpísať ako súčin n základov, $a^2 = a . a$, $a^3 = a . a . a$, ...

Mocniny s celočíselným exponentom - pre každé reálne číslo a (a ≠ 0) a pre každé celé číslo n definujeme nasledujúce mocniny: $a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Mocnina s racionálnym exponentom - Nech reálne číslo *a* je kladné a nech $n = \frac{r}{s}$ je racionálny exponent , kde *r j*e celé číslo a *s* je kladné celé číslo. Potom je možné robiť úpravy typu: $a^{\frac{r}{s}} = (a^r)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r} = (\sqrt[s]{a})^r = (a^{\frac{1}{s}})^r$

Exponent a základ mocniny

Exponent (mocniteľ) je číslo ktoré určuje, koľkokrát sa základ násobí.

Základ mocniny (mocnenec) je číslo, ktoré sa opakovane násobí.

$a^r . a^s = \boldsymbol{a^{x+y}}$, $\boldsymbol{\frac{a^r}{a^s}} = \boldsymbol{a^{r-s}}$, $(\boldsymbol{a^r})^s = \boldsymbol{a^{rs}}$, $(\mathbf{a.b})^r = \boldsymbol{a^r . b^r}$, $\left(\boldsymbol{\frac{a}{b}}\right)^r = \boldsymbol{\frac{a^r}{b^r}}$

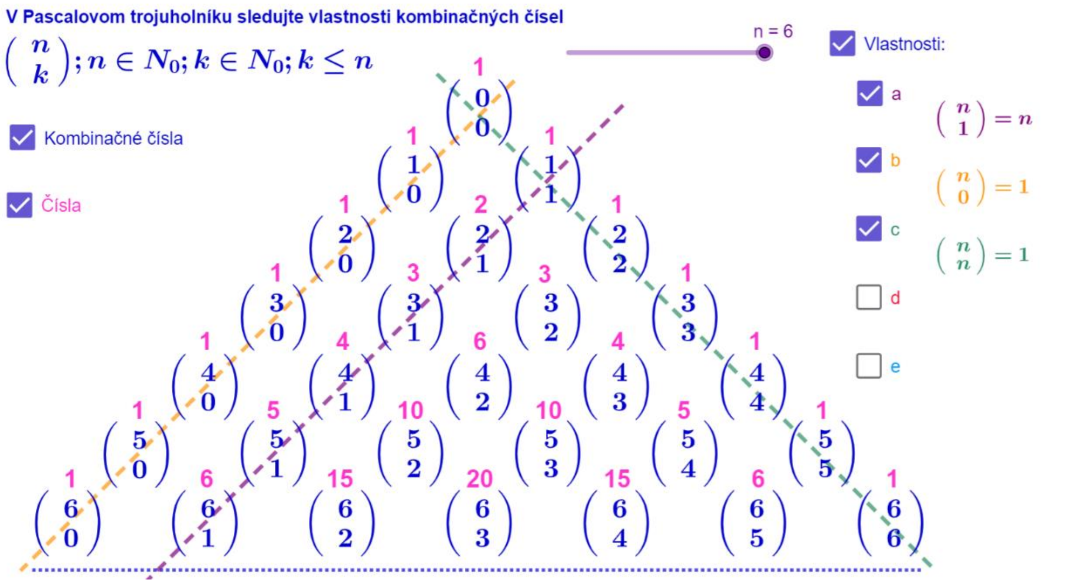
Kombinačné číslo

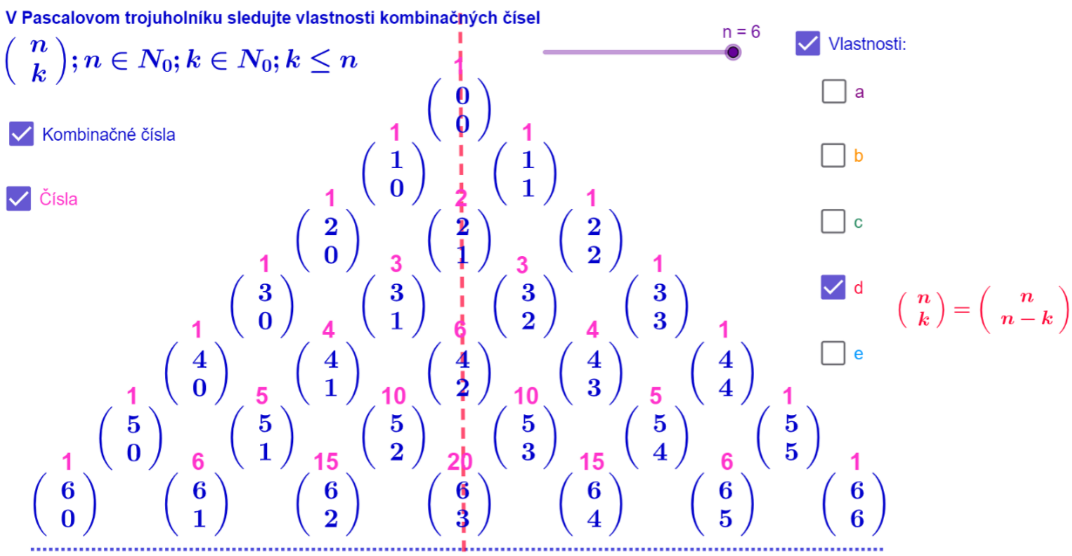
Vysvetlite pojem faktoriál, kombinačné číslo a zapíšte vzťah pre výpočet kombinačného čísla. Uveďte základné vlastnosti kombinačných čísel a demonštrujte ich na Pascalovom trojuholníku.

Faktoriál – faktoriál čísla n, $n \in N_0$ je súčin všetkých prirodzených čísel menších alebo rovných n. Zapisuje sa n! a číta sa „n faktoriál“. Napríklad 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

Kombinačné číslo – udáva počet kombinícií, teda spôsobov, ako vybrať k prvkov z n prvkovej množiny. Kombinačné čísla sa vyskytujú veľmi často v kombinatorických výpočtoch, a preto majú špeciálne značenie $\binom{n}{k}$ (čítame „n nad k“).

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, pre prirodzené čísla n, $0! = 1$,
- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$, pre prirodzené čísla n a nezáporné celé čísla k, nie väčšie ako n,





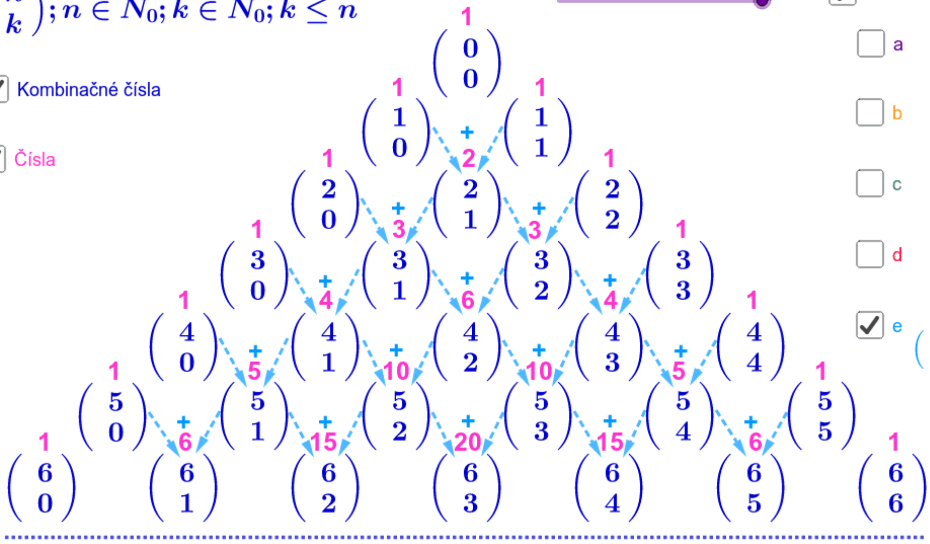
V Pascalovom trojuholníku sledujte vlastnosti kombinačných čísel

$\binom{n}{k}; n \in N_0; k \in N_0; k \leq n$

n = 6

- [x] Kombinačné čísla
- [x] Čísla

- [x] Vlastnosti:
  - [ ] a
  - [ ] b
  - [ ] c
  - [ ] d
  - [x] e $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$



Výrazy 1

Objasnite pojmy konštanta, premenná, výraz, hodnota výrazu, obor definície výrazu, rovnosť výrazov a opačný výraz. Uveďte príklady výrazov s nasledujúcimi obormi definície: R, R-{0}, R^+. Určte hodnoty týchto výrazov pre x=5.

Konštanta – je stála veličina. Konštantou sa vo všeobecnosti myslí výsledok poznania relatívne stálych súvislostí alebo vlastností.

Premenná – je značka resp. označenie, ktoré zastupuje prvky určitého oboru variability.

Výraz – je zoskupenie matematických symbolov na vyjadrenie určitých vzťahov a operácií.

> **Algebraický výraz** je tvorený z konštánt („čísla“) a premenných („písmena“), ktoré sú dokopy spojené pomocou algebraických operácií (napr. sčítania, násobenia) a zátvoriek. Premenná zastupuje čísla z určitého oboru hodnôt. Pomocou algebraických výrazov môžeme vykonávať všeobecné výpočty.
>
> Matematický zápis, v ktorom po nahradení premenných konštantami dostaneme konštantu, nazývame algebraický výraz.
>
> Racionálny algebraický výraz neobsahuje odmocniny, napr. $\frac{x+5}{3} - \frac{3}{4}x$
>
> Iracionálny algebraický výraz obsahuje odmocniny, napr.$\sqrt{2x-7} + 3x$
>
> **Počtový výraz** je matematický zápis, ktorým vyjadrujeme počtové operácie s číslami a poradie v akom majú byť prevedené. Napr.: (2·(5–1,76)+5):0,4.
>
> Počtové výrazy sa pomenovávajú podľa počtových operácií – výkonov. napr. počtový výraz 3 + 2 je súčet, 6 - 4 je rozdiel, 2. 4 je súčin, 4 : 2 alebo 4/2 je podiel.

Obor definície výrazu – Definičný obor premenných algebraického výrazu je množina všetkých takých hodnôt premenných, pre ktoré je algebraický výraz definovaný – má zmysel. Zvyčajne ho označujeme D (D_f).

Rovnosť výrazov – Rovnosť v matematike znamená, že dve veličiny sú rovnaké, v prípade dvoch čísiel alebo počtových výrazov sa zapisuje: a = b, znak = sa nazýva znak rovnosti. 1+ 5 = 2 . 3

Opačný výraz – výraz s opačnou hodnotou, teda ak si predstavíme napríklad číselnú os, tak k výrazu 5 je opačný výraz -5. Ak chceme opačný výraz k 5x + 2y – 2z tak dáme celý výraz do zátvorky a pred zátvorku dáme mínus **– (5x + 2y – 2z) = -5x -2y +2z**

Hodnota výrazu – Výpočet hodnoty algebraického výrazu pre dané hodnoty premenných, vykonáme dosadením daných hodnôt premenných za jednotlivé premenné a určením hodnoty takto vzniknutého číselného výrazu.

Uveďte príklady výrazov s nasledujúcimi obormi definície: (Určte hodnoty týchto výrazov pre x=5)

R x=y, 5=5

R-{0} $\frac{1}{x}$ = y, $\frac{1}{5} = 0{,}2$

R^+ IyI = x, I-5I = 5, I5I = 5

Výrazy 2

Definuj pojmy: výraz, mnohočlen, stupeň mnohočlena, člen mnohočlena, absolútny, lineárny a kvadratický člen. Uveďte a vysvetlite vzorce pre druhú mocninu dvojčlena a rozdiel druhých mocnín dvoch premenných.

Výraz – je zoskupenie matematických symbolov na vyjadrenie určitých vzťahov a operácií.

> **Algebraický výraz** je tvorený z konštánt („čísla“) a premenných („písmena“), ktoré sú dokopy spojené pomocou algebraických operácií (napr. sčítania, násobenia) a zátvoriek. Premenná zastupuje čísla z určitého oboru hodnôt. Pomocou algebraických výrazov môžeme vykonávať všeobecné výpočty.
>
> Matematický zápis, v ktorom po nahradení premenných konštantami dostaneme konštantu, nazývame algebraický výraz.
>
> Racionálny algebraický výraz neobsahuje odmocniny, napr. $\frac{x+5}{3} - \frac{3}{4}x$
>
> Iracionálny algebraický výraz obsahuje odmocniny, napr.$\sqrt{2x-7} + 3x$
>
> **Počtový výraz** je matematický zápis, ktorým vyjadrujeme počtové operácie s číslami a poradie v akom majú byť prevedené. Napr.: (2·(5–1,76)+5):0,4.
>
> Počtové výrazy sa pomenovávajú podľa počtových operácií – výkonov. napr. počtový výraz 3 + 2 je súčet, 6 - 4 je rozdiel, 2. 4 je súčin, 4 : 2 alebo 4/2 je podiel.

Mnohočlen - je výraz, ktorý sa dá zapísať ako súčet jednočlenov : $5k^2 + 3p^3 + 4\,pq + 56$

Názov mnohočlenu je odvodený od počtu jeho jednočlenov (sú oddelené znamienkami + alebo -)

- jednočlen $2x^5$
- dvojčlen $m + n^2$
- trojčlen $a^2 - b^3 + 5$
- štvorčlen $pq + p^2q - 5p + 2$

Stupeň mnohočlena – určuje najväčší stupeň jeho jednočlenov.

Napr.: $3a^7 – 5b^2 + 4a^3b^5$ je trojčlen 8. stupňa

> Výraz typu $\mathbf{A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$, pričom $\mathbf{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, x \in R, a_n \neq 0, n \in N}$ nazývame **polynómom** – mnohočlen n - tého stupňa s premennou x.
>
> Stupeň polynómu je najvyšší exponent premennej. Číselnú hodnotu mnohočlena dostaneme ak do mnohočlena dosadíme za premennú niektoré číslo z oboru premennej.

Člen mnohočlena – Jednotlivé sčítance mnohočlenu nazývame členmi mnohočlenu.

a_0 – absolútny člen, a_1x – lineárny člen, a_2x^2 – kvadratický člen, a_3x^3 – kubický člen,

a_4x^4 – člen 4. stupňa, a_5x^5 – člen 5. stupňa, . . . a_nx^n – člen n. stupňa

Vzorce:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 = aa + ab + ba + bb$$

$$(a-b)^2 = (a+b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 = aa - ab - ba + bb$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = aa + ab - ba - bb$$

Logaritmy

Zadefinujte pojem logaritmus čísla x pri základe a. Uveďte základné vzťahy pre : $\log_a(xy)$, $\log_a \frac{x}{y}$, $\log_a x^y$, $\log_r s$ pomocou základu a. Vzťahy interpretujte na konkrétnych príkladoch. Vysvetlite pojem dekadický logaritmus a prirodzený logaritmus.

Základ logaritmu – Logaritmom kladného reálneho čísla *x* pri základe *a* $\in R^+ - \{1\}$ nazývame také reálne číslo *v*, pre ktoré platí: $a^y = x$. Zapisujeme: $log_a\, x = y$.

***a* - základ logaritmu** **x - logaritmované číslo** ***y* - logaritmus**

$log_a(xy) = log_a x + \log_a y$	log 2 + log 3 = log (2.3)
$log_a \frac{x}{y} = log_a x - \log_a y$	$log_2 \frac{2}{3} = log_2 2 - \log_2 3$
$log_a\, x^y = y.\ log_a x$	$log_a\, x^y = y.\ log_a x$
$log_r\, s = a \Leftrightarrow r^a = s$	$log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$

Prirodzený logaritmus – má základ Eulerovo číslo e = 2,71828...

Zápis: y = ln x $y = \log_e x$

Dekadický logaritmus – má základ číslo 10

Zápis: y = log x $y = \log_{10} x$

Číselné obory 1

Charakterizujte jednotlivé obory čísel, graficky znázornite (Vennove diagramy) a symbolicky zapíšte vzťahy podmnožín medzi nimi. Rozhodnite do ktorých číselných množín patria nasledujúce čísla:

$$\mathbf{-812;\ \frac{3}{5};\ 0,27;\ 5,\overline{12};\ 0;\ 5!;\ \sqrt{2}}$$

Čísla prirodzené (N), celé (Z), nezáporné (N_0), záporné (Z^-), racionálne (Q), iracionálne (I), reálne (R)

Prirodzené čísla N = {1,2,3,4,5,6,....}

- na tejto množine sú definované operácie sčítania a násobenia (umocnenie)
- obor prirodzených čísel = množina + operácie: (N,+, .)
- veta o uzavretosti: (a+b)∈N ∧ (a.b) ∈N

Celé čísla Z = {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,....}

- na tejto množine je definovaná operácia odčítania, sčítania, násobenia
- obor celých čísel: (Z, +, - , .)

Racionálne čísla Q

- množina všetkých čísel, ktoré sa dajú zapísať v tvare zlomku $\frac{p}{q}$; p∈Z, q∈N
- na tejto množine je definovaná operácia delenia, sčítania, násobenia, odčítania
- zlomky, zmiešané čísla, periodické čísla

Iracionálne čísla I = {...sin 25°; log 5,3; ... ;√2;√3;...; e; π;...}

- všetky čísla, ktoré sa nedajú zapísať do tvaru zlomku

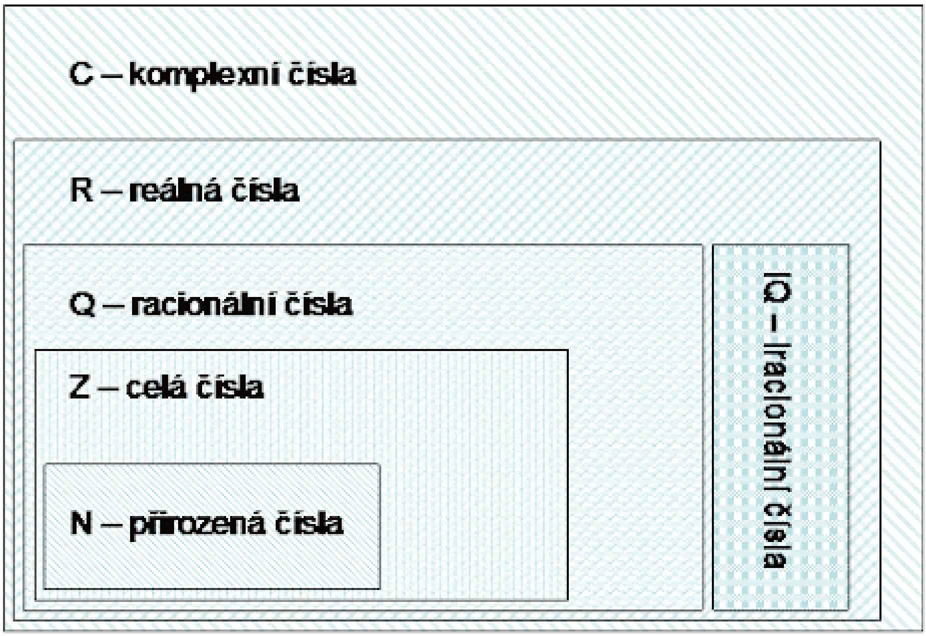
Reálne čísla R (Q ∪ I)

- obor: (R, +, -, . , / ,$\sqrt{\ }$)

Komplexné čísla C

- zápis: [a,b]; C = R + R
- na tejto množine je definovaná operácia odmocnenia
- množina čísel tvaru: a + bi; pričom $i^2 = -1$; a – reálna zložka, bi – imaginárna zložka

N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R ⊂ C; Q ∪ I = R; Q ∩ I = ∅



Rozhodnite do ktorých číselných množín patria nasledujúce čísla:

$\mathbf{-812}$; $\frac{3}{5}$; $\mathbf{0,27}$; $\mathbf{5,\overline{12}}$; $\mathbf{0}$; $\mathbf{5!}$; $\sqrt{\mathbf{2}}$

$-812 \in Z, R$ $\quad$ $3/5 = 0,6 \in Q, R$ $\quad$ $0,27 \in Q, R$ $\quad$ $5,\overline{12} \in I, R$

$0 \in Z, R$ $\quad$ $5! = 120 \in N, Z, R$ $\quad$ $\sqrt{2} \in I, R$

Číselné obory 2

Objasnite obsah pojmov prirodzené, celé, nezáporné, záporné, racionálne, iracionálne, reálne čísla, desatinný rozvoj, číslo e, číslo π. Vysvetlite čo je to interval a aké druhy intervalov poznáme. Môžeme množinu zloženú z prirodzených čísel zapísať pomocou intervalov?

Čísla prirodzené (N), celé (Z), nezáporné (N_0), záporné (Z^-), racionálne (Q), iracionálne (I), reálne (R)

Prirodzené čísla N = {1,2,3,4,5,6,....}

- na tejto množine sú definované operácie sčítania a násobenia (umocnenie)
- obor prirodzených čísel = množina + operácie: (N,+, .)
- veta o uzavretosti: (a+b)∈N ∧ (a.b) ∈N

Celé čísla Z = {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,....}

- na tejto množine je definovaná operácia odčítania, sčítania, násobenia
- obor celých čísel: (Z, +, - , .)

Racionálne čísla Q

- množina všetkých čísel, ktoré sa dajú zapísať v tvare zlomku $\frac{p}{q}$; p∈Z, q∈N
- na tejto množine je definovaná operácia delenia, sčítania, násobenia, odčítania
- zlomky, zmiešané čísla, periodické čísla

Iracionálne čísla I = {...sin 25°; log 5,3; ... ;√2;√3;...; e; π;...}

- všetky čísla, ktoré sa nedajú zapísať do tvaru zlomku

Reálne čísla R (Q ∪ I)

- obor: (R, +, -, . , / ,$\sqrt{\ }$)

N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R ⊂ C; Q ∪ I = R; Q ∩ I = ∅

Desatinný rozvoj – sú všetky čísla za desatinnou čiarkou. Racionálne čísla môžeme zapísať nielen v tvare zlomku aj v tvare desatinného čísla. Desatinné číslo môže mať **ukončený desatinný rozvoj (konečný desatinný rozvoj)**. Napríklad: $\frac{15}{60} = 15:60 = 0,25$

Periodické čísla sa dajú zapísať v tvare zlomku, alebo v tvare **nedokončeného desatinného rozvoja** s vyznačenou periódou **(nekonečný periodický desatinný rozvoj)**.

Číslo π – Ludolfovo číslo je matematická konštanta definovaná ako pomer obvodu kruhu k jeho priemeru. Často sa používa jeho zaokrúhlená hodnota 3,14, prípadne zlomok $\frac{22}{7}$. Veľa matematických, vedeckých, fyzikálnych a inžinierskych rovníc obsahuje π, čo z neho robí jednu z najdôležitejších matematických konštánt. Ludolfovo číslo je iracionálne. Pomenované je podľa nemecko-holandského matematika Ludolph van Ceulena. **π = 3,141592654...**

Číslo e - Eulerovo číslo (tiež označované ako základ prirodzených logaritmov, niekedy aj ako Napierova konštanta; obvykle je značené písmenom e) je jedna zo základných matematických konštánt. Jeho približná hodnota je **e = 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352…** Eulerovo číslo je iracionálne, tzn. jeho desatinných rozvoj je nekonečný a neperiodický.

Interval (uzavretý, otvorený, ohraničený, neohraničený) - sú podmnožiny množiny reálnych čísel, ktoré ležia medzi dvoma určenými bodmi označovanými ako hraničné body intervalu.

Napr.: (2; 7) – je množina reálnych čísel nachádzajúcich sa na číselnej osi medzi číslami 2 a 7, ale bez týchto čísel.

⟨2; 7⟩ – je množina reálnych čísel nachádzajúcich sa na číselnej osi medzi číslami 2 a 7, ale vrátane týchto čísel.

Druhy intervalov: (intervaly 1, 2, 3 sú ohraničené, intervaly 4, 5 sú neohraničené – aspoň jeden z koncových bodov je nekonečno)

1. Otvorený interval $(a, b) = \{x \in R;\ a < x < b\}$

2. Uzavretý interval $\langle a, b\rangle = \{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$

3. Polootvorený/polouzavretý interval $\langle a; b) = \{x \in R;\ a \leq x < b\}$ $(a; b\rangle = \{x \in R;\ a < x \leq b\}$

4. Neohraničený interval $(a; \infty) = \{x \in R;\ a < x\}$ $\langle a; \infty) = \{x \in R;\ a \leq x\}$ $(-\infty; b) = \{x \in R;\ x < b\}$ $(-\infty; b\rangle = \{x \in R;\ x \leq b\}$

5. Obojstranne neohraničený interval $(-\infty; \infty) = \{x \in R\}$

Môžeme množinu zloženú z prirodzených čísle zapísať pomocou intervalov? - Nie

Číselné obory 3

Definujte pojmy: zlomok, čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, desatinný rozvoj čísla (konečný, nekonečný a periodický). Vysvetlite, ktoré čísla patria do oboru racionálnych čísel.

Zlomky (čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, hlavná zlomková čiara)

Zlomok – je zápis čísla vyjadrený ako podiel dvoch celých čísel, pričom znamienko delenia je nahradené tzv. zlomkovou čiarou. Aby mal zlomok zmysel, musí platiť: b ⍰ 0.

$\frac{a}{b}$ $\frac{\text{čitateľ}}{\text{menovateľ}}$

Spoločný menovateľ - Najmenší spoločný menovateľ, alebo spoločný menovateľ je najmenší spoločný násobok menovateľov zlomkov. Je najmenšie kladné celé číslo, ktoré je násobkom každého menovateľa.

Základný tvar zlomku - Zlomok $\frac{a}{b}$ je v základnom tvare, ak sú čísla a, b nesúdeliteľné (ich jediný kladný spoločný deliteľ je teda číslo 1).

Zložený zlomok - Zlomok, ktorý má v čitateli alebo v menovateli opäť zlomok, alebo má zlomok aj v čitateli, aj v menovateli.

$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} = \frac{4}{7} : \frac{3}{8} = \frac{4}{7} . \frac{8}{3} = \frac{32}{21}$

Desatinný rozvoj – sú všetky čísla za desatinnou čiarkou. Racionálne čísla môžeme zapísať nielen v tvare zlomku aj v tvare desatinného čísla. Desatinné číslo môže mať **ukončený desatinný rozvoj (konečný desatinný rozvoj)**. Napríklad: $\frac{15}{60} = 15{:}\,60 = 0{,}25$

Periodické čísla sa dajú zapísať v tvare zlomku, alebo v tvare **nedokončeného desatinného rozvoja** s vyznačenou periódou **(nekonečný periodický desatinný rozvoj)**.

Racionálne čísla Q

- množina všetkých čísel, ktoré sa dajú zapísať v tvare zlomku $\frac{p}{q}$; p ∈ Z, q ∈ N
- na tejto množine je definovaná operácia delenia, sčítania, násobenia, odčítania
- zlomky, zmiešané čísla, periodické čísla