1.1 Logika a množiny

Výroky 1

Vysvetlite obsah pojmov: výrok, pravdivostná hodnota výroku, negácia výroku. Uveďte príklady negácií výrokov s údajmi o počte (najviac, aspoň, práve, nikto, všetci...). Vymenujte základné logické spojky a určte ich pravdivostné hodnoty.

Výrok – je oznamovacia veta o ktorej má zmysel uvažovať, či je pravdivá alebo nie. Označujú veľkými písmenami A, B, ..., V, ... Z.

Pravdivostná hodnota – je priradenie jednej z pravdivostných hodnôt danému výroku. Symbolicky sa značí najčastejšie číslicami alebo písmenami. Pravda – 1 alebo p, nepravda – 0 alebo n.

Negácia výroku – je presne to, čo ten výrok netvrdí. Mení pravdivostnú hodnotu výroku na opačnú. Teda 1 na 0 a naopak. Označuje sa: $A^{/}$ alebo $\neg A$, $(1)^{/} = 0$, $(A^{/})^{/} = A$

Kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve) –

Existenčný kvant. – ∃ – aspoň jeden existuje

Všeobecný kvant. – ∀ – pre všetky

Aspoň – minimálne, najmenej – výrok: Aspoň n je..., negácia: Najviac n - 1 je...

Najviac – maximálne, nanajvýš – výrok: Najviac n je..., negácia: Aspoň n + 1 je...

Práve – presne – výrok: Práve n je..., negácia: Najviac n – 1 alebo aspoň n +1 je...

Konjunkcia – A ∧ B – ,,a súčasne“/,,a“ – Platia oba výroky A aj B.

Disjunkcia – = alternatíva – A ∨ B - ,,alebo“ – Platí aspoň jeden z výrokov A,B.

Implikácia – A ⇒ B **–**,,z toho vyplýva“/,,ak..., tak...“ – Výrok B platí za predpokladu, že platí výrok A.

Ekvivalencia – A ⇔ B - ,,práve vtedy keď“ – Z A vyplýva B a z B vyplýva A. (A ⍰ B) ⍰ (B ⍰ A)

Tabuľka pravdivostných hodnôt – ukazuje, kedy sú zložené výroky obsahujúce logické spojky pravdivé a kedy nie.

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A ⇒ B	A ⇔ B
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Výroky 2

Vysvetlite obsah pojmov výrok, hypotéza, pravdivostná hodnota výroku, negácia výroku, výroky s kvantifikátormi. Zložené výroky, negácie zložených výrokov. Vyslovte obmenu, obrátenie i negáciu nasledujúcej vety: Ak je prirodzené číslo deliteľné šiestimi, tak je deliteľné dvoma a súčasne tromi.

Výrok – je oznamovacia veta o ktorej má zmysel uvažovať, či je pravdivá alebo nie. Označujú veľkými písmenami A, B, ..., V, ... Z.

Hypotéza – oznamovacia veta, ktorá má charakter výroku, o ktorom v danom okamihu nemožno jednoznačne určiť, či je pravdivý alebo nepravdivý. Jedna z týchto podmienok však musí nastať. Vedecky prijateľná domnienka umožňujúca vedecké vysvetlenie nejakých javov. predpoklad, domnienka

Pravdivostná hodnota – je priradenie jednej z pravdivostných hodnôt danému výroku. Symbolicky sa značí najčastejšie číslicami alebo písmenami. Pravda – 1 alebo p, nepravda – 0 alebo n.

Negácia výroku – je presne to, čo ten výrok netvrdí. Mení pravdivostnú hodnotu výroku na opačnú. Teda 1 na 0 a naopak. Označuje sa: A' alebo $\neg A$, $(1)' = 0$, $(A')' = A$

Kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve) –

Existenčný kvant. – $\exists$ – aspoň jeden existuje

Vo vrecku je aspoň 1 zelená guľka.

Všeobecný kvant. – $\forall$ – pre všetky

Vo vrecku sú všetky guľky zelené.

Aspoň – minimálne, najmenej – výrok: Aspoň n je..., negácia: Najviac n - 1 je...

Vo vrecku je aspoň 5 guliek zelených. / Vo vrecku sú najviac 4 guľky zelené.

Najviac – maximálne, nanajvýš – výrok: Najviac n je..., negácia: Aspoň n + 1 je...

Vo vrecku je najviac 5 guliek zelených. / Vo vrecku je aspoň 6 guliek zelených.

Práve – presne – výrok: Práve n je..., negácia: Najviac n – 1 alebo aspoň n +1 je...

Vo vrecku je presne 5 guliek zelených. / Vo vrecku sú aspoň 4 alebo aspoň 6 guľky zelené.

Logické spojky – spojky (napr. a, alebo, ak..., potom..., je ekvivalentné, nie je pravda, že...), pomocou ktorých z jednoduchých výrokov vytvárame zložitejšie výroky. V matematických zápisoch sa používajú symboly na zápis týchto spojok: konjunktor – $\wedge$ disjunktor (nevylučujúci) – $\vee$ vylučujúci disjunktor - $\vee\vee$ implikátor $\Rightarrow$ ekvivalentor $\Leftrightarrow$

Implikácia – $A \Rightarrow B$ **–**,,z toho vyplýva“/,,ak..., tak...“ – Výrok B platí za predpokladu, že platí výrok A.

Obmena implikácie – $A \Rightarrow B$ platí vtedy, ak platí $A' \Leftarrow B'$ **–** Pri negovaní výrokov spojených s implikáciou sa implikácia obráti.

Obrátená implikácia – výrok $A \Rightarrow B$ platí, ak platí aj $A \Leftarrow B$ – Ak teda platí implikácia a k nej obrátená implikácia, sú výroky ekvivalentné.

Výrok**: Ak je prirodzené číslo deliteľné šiestimi, tak je deliteľné dvoma a súčasne tromi.**

Obmena: Ak prirodzené číslo je deliteľné 2 alebo 3, tak nie je deliteľné 6.

Obrátenie: Ak je prirodzené číslo deliteľné 2 a súčasne 3, tak je číslo deliteľné 6.

Negácia: Prirodzené číslo je deliteľné 6 a nie je deliteľné 2 alebo 3.

zložený výrok	negácia
$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Množiny 1

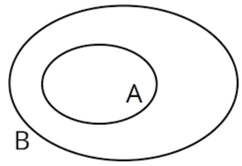
Charakterizujte pojem množina, uveďte spôsoby ich určenia. Vysvetlite a demonštrujte na Vennových diagramoch nasledujúce pojmy: podmnožina, rovnosť množín, prienik, zjednotenie, rozdiel množín, doplnok množiny, disjunktné množiny.

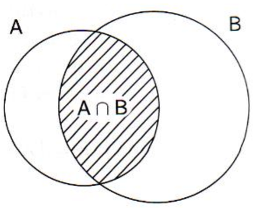
Množina – je istý súbor prvkov, ktorými môžu byť čísla, ľudia, veci,..., ktoré spĺňajú určitú vlastnosť. Je jednoznačne určená, keď o každom prvku viem povedať, či danú vlastnosť má alebo nemá, t.j. či do množiny patrí alebo nepatrí.

Prvok x patrí do množiny A zapisujeme: $x \in A$, prvok x nepatrí do množiny A zapisujeme: $x \notin A$, označenie: množiny: A, B, R ... prvky: a, b, 1, 2, ...

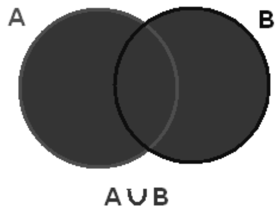
Môžeme ich rozdeliť podľa počtu prvkov na **konečné, nekonečné a prázdne**. Môžeme ich určiť **vymenovaním prvkov, určením charakteristickej vlastnosti**.

Podmnožina – Majme dve množiny A a B. Ak je každý prvok množiny A tiež prvkom množiny B, pričom nie každý prvok množiny B je tiež prvkom množiny A, potom hovoríme, že množina A je podmnožinou B a označujeme $A \subset B$.

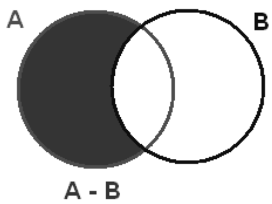




Prienik – $A \cap B$ – Prienik množín A,B je množina, ktorá obsahuje prvky patriace do množiny A **a súčastne** do množiny B.

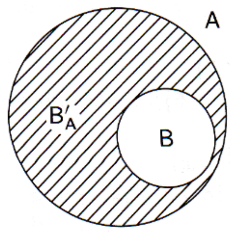


Zjednotenie – $A \cup B$ – Zjednotenie množín A,B je množina, ktorá obsahuje prvky patriace do množiny A, alebo do množiny B.



Rozdiel množín – A - B – Rozdiel množín A,B (v tomto poradí) je množina, ktorá obsahuje prvky patriace do A a súčastne nepatriace do B.

Doplnok množiny – A'_B – Doplnok množiny A vzhľadom na množinu B je rozdiel množín B – A ak platí, že $A \subset B$.



Disjunktné množiny – Ak je prienikom dvoch množín A,B prázdna množina, tak sú tieto množiny disjunktné

Množiny 2

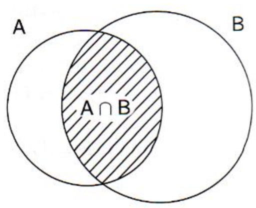
Definujte pojmy množina a podmnožina. Opíšte základné operácie s množinami a zakreslite ich pomocou Vennovych diagramov. Analyzujte súvis týchto operácií s príslušnými operáciami matematickej logiky.

Množina – je istý súbor prvkov, ktorými môžu byť čísla, ľudia, veci,..., ktoré spĺňajú určitú vlastnosť. Je jednoznačne určená, keď o každom prvku viem povedať, či danú vlastnosť má alebo nemá, t.j. či do množiny patrí alebo nepatrí.

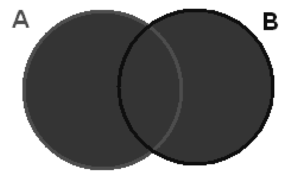
Prvok x patrí do množiny A zapisujeme: $x \in A$, prvok x nepatrí do množiny A zapisujeme: $x \notin A$, označenie: množiny: A, B, R ... prvky: a, b, 1, 2, ...

Môžeme ich rozdeliť podľa počtu prvkov na **konečné, nekonečné a prázdne**. Môžeme ich určiť **vymenovaním prvkov, určením charakteristickej vlastnosti**.

Podmnožina – Majme dve množiny A a B. Ak je každý prvok množiny A tiež prvkom množiny B, pričom nie každý prvok množiny B je tiež prvkom množiny A, potom hovoríme, že množina A je podmnožinou B a označujeme $A \subset B$.

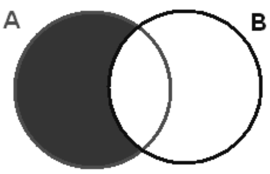


Prienik – $A \cap B$ – Prienik množín A,B je množina, ktorá obsahuje prvky patriace do množiny A **a súčastne** do množiny B.



A∪B

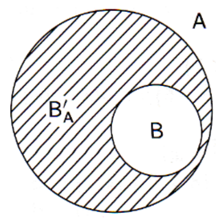
Zjednotenie – $A \cup B$ – Zjednotenie množín A,B je množina, ktorá obsahuje prvky patriace do množiny A, **alebo** do množiny B.



A - B

Rozdiel množín – A - B – Rozdiel množín A,B (v tomto poradí) je množina, ktorá obsahuje prvky **patriace** do A **a súčastne nepatriace** do B.

Doplnok množiny – A'_B – Doplnok množiny A vzhľadom na množinu B je rozdiel množín B – A ak platí, že $A \subset B$.



Prienik – $A \cap B$ – konjunkcia – spojka ,,a“

Zjednotenie – $A \cup B$ – disjunkcia - spojka ,,alebo“

Množiny 3

Objasnite pojmy množina, konečná množina, nekonečná množina, prázdna množina, vymenujte možnosti určenia množín a rozhodnite o vhodnosti ich použitia pri konečných a nekonečných množinách.

Množina – je istý súbor prvkov, ktorými môžu byť čísla, ľudia, veci,..., ktoré spĺňajú určitú vlastnosť. Je jednoznačne určená, keď o každom prvku viem povedať, či danú vlastnosť má alebo nemá, t.j. či do množiny patrí alebo nepatrí.

Prvok x patrí do množiny A zapisujeme: $x \in A$, prvok x nepatrí do množiny A zapisujeme: $x \notin A$, označenie: množiny: A, B, R … prvky: a, b, 1, 2, …

Môžeme ich rozdeliť podľa počtu prvkov na **konečné, nekonečné a prázdne**. Môžeme ich určiť **vymenovaním prvkov, určením charakteristickej vlastnosti, intervalom**.

Konečná a nekonečná množina – Konečná množina obsahuje konečný počet prvkov – napr. všetky dvojciferné párne čísla. **Nekonečná množina** obsahuje nekonečný počet prvkov – napr. všetky párne čísla.

Počet prvkov množiny – je konečný, nekonečný alebo prázdny.

Prázdna množina – $\emptyset$ – množina, ktorá neobsahuje žiaden prvok.

Dôkazy

Vymenujte základné druhy dôkazov v matematike a aké postupy volíme pri jednotlivých dôkazoch.

Priamy dôkaz implikácie A ⇒ B. Vychádzame z predpokladu implikácie A a priamym reťazcom implikácií B1, B2, B3, ..., B, kde B1, B2, B3, ..., B3 sú axiómy alebo dokázané tvrdenia a B je záver. Podstata priameho dôkazu, spočíva vo vytvorení akéhosi reťazca implikácií A ⇒ B1 , B1⇒ B2 , ... , Bk ⇒ B a následného logického záveru: A ⇒ B.

Príklad: **Veta:** Druhá mocnina nepárneho čísla je číslo nepárne.

Dôkaz: Preformulujme danú vetu - tvrdenie tak, aby malo tvar implikácie:

∀ n ∈ N: n je nepárne číslo ⇒ n^2 je nepárne číslo **[∀ n ∈ N: A(n) ⇒ B(n)]**

A(n) : n je nepárne číslo ⇒ $B_1(n)$: n=2k+1, k∈N_0 ⇒ $B_2(n)$: $n^2 = (2k+1)^2$ ⇒ $B_3(n)$: $n^2 = 4k^2 + 4k+1$ ⇒ $B_4(n)$: $n^2 = 2(2k^2 + 2k)+1$ ⇒ $B_5(n)$: $n^2 = 2k + 1$, k ∈ N_0 ⇒ **B(n): n^2 je nepárne číslo**

Nepriamy dôkaz používame najmä na dôkaz implikácie A ⇒ B. Postupujeme tak, že najskôr **vytvoríme obmenu implikácie B´⇒ A´** a túto dokazujeme priamo. B´⇒ B1⇒ B2⇒...→ Bn ⇒ A´. Využívame skutočnosť, že implikácia a jej obmena majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu, a preto namiesto implikácie môžeme dokazovať jej obmenu.

Príklad: **Veta:** Ak n^2 je párne číslo, tak aj n je párne číslo. **~ ∀ n ∈ N: 2| n^2 ⇒ 2| n**

Obmena vety: ∀ n ∈ N: 2 nedelí n ⇒ 2 nedelí n^2

Dôkaz: A(n) : 2 nedelí n ⇒ $B_1(n)$: n=2k+1, k∈N_0 ⇒ $B_2(n)$: $n^2 = (2k+1)^2$ ⇒ $B_3(n)$: $n^2 = 4k^2 + 4k+1$ ⇒ $B_4(n)$: $n^2 = 2(2k^2 + 2k)+1$ ⇒ $B_5(n)$: $n^2 = 2k + 1$, k ∈ N_0 ⇒ **B(n): 2 nedelí n2**

Dôkaz sporom – Dôkaz sporom vety A ⇒ B sa robí tak, že sa **daná implikácia neguje a pomocou reťazca implikácií sa dospeje k logickému sporu**. Hovoríme, že sme prišli k sporu. Zo sporu vyplýva, že negované tvrdenie neplatí a teda musí platiť pôvodná veta.

Príklad: **Veta:** ∀ n ∈ N: 2| n ⇒ 2| n 2

Negácia vety: ∃ n ∈ N: 2| n ∧ 2 nedelí n2

Dôkaz: A(n) : 2|n ⇒ $B_1(n)$: n=2k, k ∈ N ⇒ $B_2(n)$: $n^2 = (2k)^2$ ⇒ $B_3(n)$: $n^2 = 4k^2$ ⇒ $B_4(n)$: $n^2 = 2(2k^2)$ ⇒ $B_5(n)$: $n^2 = 2k$, k ∈ N ⇒ **B(n): 2|n^2** – SPOR s predpokladom, že 2 nedelí n^2, t.j. negovaná veta je nepravdivá ~ pôvodná veta je pravdivá.