Technická univerzita v Košiciach

Zbierka riešených a neriešených úloh

z matematiky

pre uchádzačov o štúdium na TU v Košiciach

Martin Bača – Ján Buša – Andrea Feňovčíková
Zuzana Kimáková – Denisa Olekšáková – Štefan Schrötter

Košice 2011

Recenzovali: prof. RNDr. Dušan Knežo, CSc.
doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc.
prof. RNDr. Ján Plavka, CSc.

ISBN 978-80-553-0833-3

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.
Spracované programom pdfLaTeX.

Predhovor

Milí mladí priatelia,

táto učebná pomôcka je určená vám – uchádzačom o štúdium na fakultách Technickej univerzity v Košiciach. Kým na Ekonomickej fakulte a Fakulte umení sa už tradične konajú prijímacie skúšky, na ostatných fakultách bude v roku 2012 novou súčasťou prijímacieho konania písomný test z matematiky. Cieľom tohto testu je overiť *základné vedomosti zo stredoškolskej matematiky.* Zbierka, ktorú práve držíte v rukách, pokrýva tie oblasti matematiky, ktoré budú v testoch obsiahnuté a jej prvoradým poslaním je umožniť vám dobre sa na tento vstupný test pripraviť. Vedeniu univerzity a fakúlt, ako aj autorskému kolektívu, ide však najmä o to, aby ste sa tým súčasne dobre pripravili aj na základný kurz vysokoškolskej matematiky v prvom roku štúdia.

Zbierka pozostáva z 15 kapitol. V úvode každej kapitoly sú vyriešené vzorové príklady, pričom výklad obsahuje aj poznatky z teórie, potrebné na vyriešenie úloh. Druhou časťou každej kapitoly je spravidla 20 neriešených úloh. *Písomné testy v rámci prijímacieho konania budú zostavované výlučne z úloh uvedených v tejto zbierke.*

Na konci zbierky sú uvedené správne odpovede ku všetkým neriešeným úlohám, rozčlenené podľa kapitol.

Veríme, že dva vzorové testy, zostavené z úloh v zbierke, pomôžu čitateľom získať reálnu predstavu o náročnosti testov. Ich výsledky neuvádzame, pozorný čitateľ ich nájde medzi uvedenými odpoveďami. Na vypracovanie testu (t. j. na vyriešenie úloh a označenie správnych odpovedí) bude mať uchádzač k dispozícii 90 minút.[1] V každej úlohe je správna len jedna z uvedených odpovedí. Za správnu odpoveď uchádzač získa 10 bodov, za nesprávnu odpoveď stratí 3 body. Za nevyplnenú odpoveď sa započíta 0 bodov.

Sme presvedčení, že každý uchádzač, ktorý samostatne vyrieši úlohy v tejto zbierke, nielen úspešne napíše vstupný test, výrazne si zvýši celkový bodový zisk a bude prijatý, ale vytvorí si súčasne veľmi dobrú východiskovú pozíciu pre úspešný vstup do štúdia na Technickej univerzite v Košiciach. Prácu s touto zbierkou preto považujte za investíciu do svojej budúcnosti – k tomu vám prajeme veľa trpezlivosti a pevnej vôle.

Chceli by sme sa poďakovať recenzentom, prof. RNDr. Dušanovi Knežovi, CSc., doc. RNDr. Božene Mihalíkovej, CSc. a prof. RNDr. Jánovi Plavkovi, CSc., za starostlivé prečítanie textu a množstvo pripomienok a návrhov, ktoré prispeli ku skvalitneniu tejto zbierky.

V Košiciach, 11. 11. 2011 autori

[1] V zbierke uvádzané údaje o časovom limite a počtoch bodov sú orientačné a môžu sa zmeniť.

Obsah

1 Zlomky

1.1 Riešené príklady

1. Číslo $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6}$ je z intervalu:

   A: $\left\langle \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\rangle$ B: $\left(\frac{2}{3}; 1 \right\rangle$ C: $\left(1; \frac{4}{3} \right\rangle$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Úpravou na najmenšieho spoločného menovateľa dostávame

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5}{30} = \frac{20 + 12 - 5}{30} = \frac{27}{30} = \frac{3 \cdot 9}{3 \cdot 10} = \frac{9}{10}.$$

Platí

$$\frac{2}{3} < \frac{9}{10} < 1,$$

teda B je správna odpoveď.

2. Číslo $\frac{5}{2} - \frac{5}{3} - \frac{5}{4}$ je:

   A: väčšie ako $\frac{5}{3} - \frac{5}{4}$ B: menšie ako $\frac{5}{3} - \frac{5}{2}$ C: rovné $2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{6} - \frac{5}{8} \right)$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Upravíme zlomky na spoločného menovateľa:

$$\frac{5}{2} - \frac{5}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 5 \cdot 3}{12} = \frac{30 - 20 - 15}{12} = -\frac{5}{12}.$$

Číslo

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 - 5 \cdot 3}{12} = \frac{20 - 15}{12} = \frac{5}{12}.$$

Keďže číslo $\frac{5}{12}$ je väčšie ako $-\frac{5}{12}$, odpoveď A nie je správna.

Odpoveď B nie je správna, pretože

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 2 - 5 \cdot 3}{6} = \frac{10 - 15}{6} = -\frac{5}{6} = -\frac{10}{12} < -\frac{5}{12}.$$

Odpoveď C je správna, pretože

$$2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{6} - \frac{5}{8} \right) = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 5 \cdot 3}{24} = 2 \cdot \frac{30 - 20 - 15}{24} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{24} \right) = -\frac{5}{12}.$$

3. Číslo $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} + 1$ je z intervalu:

A: $\left\langle -1; \frac{1}{3} \right\rangle$ B: $\langle 1; 2 \rangle$ C: $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right)$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Úpravou zlomkov na spoločného menovateľa získame

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{6} + 1 = \frac{1 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 1 \cdot 12}{12} = \frac{3 - 10 + 12}{12} = \frac{5}{12}.$$

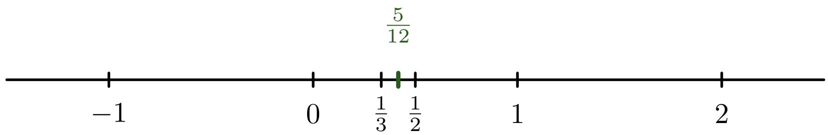
Platí

$$0 < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$$

teda správna odpoveď je C.

Poznámka. Odpoveď A nie je správna, pretože $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{5}{12}$. Odpoveď B nie je správna, pretože $0 < \frac{5}{12} < \frac{12}{12} = 1$.

Na nasledujúcom obrázku je znázornená číselná os s vyznačenými číslami, ktoré vystupujú v zadaní úlohy.



---

4. Číslo $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + 2$ je:

A: menšie ako 1 B: väčšie ako 2 C: väčšie ako $\frac{7}{2}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Zlomky upravíme na spoločného menovateľa:

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 20}{20} = \frac{8 - 15 + 40}{20} = \frac{33}{20} = \frac{20 + 13}{20} = \frac{20}{20} + \frac{13}{20} =$$

$$= 1 + \frac{13}{20} \begin{cases} > 1 & \Rightarrow \quad \text{odpoveď A nie je správna,} \\ < 2 & \Rightarrow \quad \text{odpoveď B nie je správna,} \\ < \frac{7}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} & \Rightarrow \quad \text{odpoveď C nie je správna.} \end{cases}$$

Teda správna odpoveď je D.

5. Číslo $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}$ je:

A: menšie ako $-\frac{2}{3}$ B: väčšie ako $-\frac{1}{3}$ C: rovné $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Upravíme zložený zlomok na jednoduchý tvar úpravou na spoločného menovateľa:

$$\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3\cdot3-5\cdot2}{12}}{\frac{2\cdot2-1\cdot3}{6}}=\dfrac{\frac{9-10}{12}}{\frac{4-3}{6}}=\dfrac{-\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=-\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{1}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}.$$

Pretože

$$-\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3},$$

tak ani odpoveď A, ani odpoveď B nie sú správne.

Odpoveď C nie je správna, pretože

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{3\cdot3-1\cdot2-1}{12}=\frac{9-2-1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{6}{6\cdot2}=\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{2}.$$

Teda správna odpoveď je D.

6. Číslo $\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{3}{2}}{-\frac{4}{3}+1}$ je:

A: väčšie ako -2 B: väčšie ako -5 C: menšie ako -4 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Zložený zlomok upravíme na jednoduchý tvar:

$$\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{3}{2}}{-\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\frac{1+3\cdot3}{6}}{\frac{-4+1\cdot3}{3}}=\dfrac{\frac{1+9}{6}}{\frac{-4+3}{3}}=\dfrac{\frac{10}{6}}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{3}{1}\right)=-\frac{5\cdot3}{3\cdot1}=-5<-4,$$

teda správna odpoveď je C.

7. Číslo $-1{,}5$ je:

A: väčšie ako $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ B: menšie ako $-\frac{7}{3}$ C: rovné $\frac{1}{3} - \frac{11}{6}$ D: rovné $\frac{2}{5} - \frac{7}{4}$

Riešenie. Desatinné číslo prepíšeme na zlomok, ktorý následne upravíme na základný tvar:

$$-1{,}5 = -\frac{15}{10} = -\frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2} = -\frac{3}{2}.$$

- Keďže súčin dvoch kladných čísel je číslo kladné, odpoveď A nie je správna.
- Odpoveď B nie je správna, pretože

  $$-\frac{7}{3} = \frac{-6-1}{3} = -\frac{6}{3} - \frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3} < -2 < -1{,}5.$$

  Teda číslo $-1{,}5$ je väčšie ako $-\frac{7}{3}$.
- Správna odpoveď je C, pretože

  $$\frac{1}{3} - \frac{11}{6} = \frac{1 \cdot 2 - 11}{6} = \frac{2-11}{6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5.$$
- Poznamenajme, že odpoveď D nie je správna, pretože

  $$\frac{2}{5} - \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{20} = \frac{8-35}{20} = -\frac{27}{20} \neq -1{,}5.$$

8. Číslo $2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{5}{6}\right)$ je:

A: väčšie ako $\frac{1}{4}$ B: menšie ako $\frac{1}{6}$ C: rovné $-\frac{2}{3} + \frac{7}{15} + \frac{2}{5}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Úpravou na najmenšieho spoločného menovateľa dostávame

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{5}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1 \cdot 10 + 3 \cdot 6 - 5 \cdot 5}{30} = 2 \cdot \frac{10 + 18 - 25}{30} = 2 \cdot \frac{3}{30} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

Pretože $4 < 5 < 6$, tak $\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$, a teda odpovede A a B nie sú správne.

Keďže

$$-\frac{2}{3} + \frac{7}{15} + \frac{2}{5} = \frac{-2 \cdot 5 + 7 + 2 \cdot 3}{15} = \frac{-10 + 7 + 6}{15} = \frac{3}{15} = \frac{3}{3 \cdot 5} = \frac{1}{5},$$

odpoveď C je správna.

1.2 Úlohy

---

1. Číslo $-3 + \frac{2}{3} - \frac{0}{4}$ je:

   A: menšie ako $-\frac{5}{2}$ B: väčšie ako $-\frac{8}{3}$ C: rovné $-\frac{1}{3}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

2. Číslo $1{,}4 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4}$ je:

   A: menšie ako 1 B: rovné 1 C: väčšie ako 1 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

3. Číslo $\frac{5}{4} - \frac{5}{6} - 1$ je:

   A: menšie ako $-\frac{1}{2}$ B: väčšie ako $-\frac{1}{2}$ C: väčšie ako $-\frac{1}{3}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

4. Číslo $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1$ je z intervalu:

   A: $\left\langle \frac{7}{6}; \frac{4}{3} \right\rangle$ B: $\langle -1; 1 \rangle$ C: $\left\langle 1; \frac{7}{6} \right\rangle$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

5. Číslo $\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{5}$ je z intervalu:

   A: $\left\langle -\frac{1}{7}; \frac{1}{7} \right\rangle$ B: $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{5} \right\rangle$ C: $\left\langle \frac{1}{6}; \frac{1}{5} \right)$ D: $\left\langle \frac{1}{7}; \frac{1}{6} \right\rangle$

---

6. Číslo $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ je z intervalu:

   A: $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right)$ B: $\left\langle 1; \frac{3}{2} \right)$ C: $\left\langle \frac{3}{2}; 2 \right)$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

7. Číslo $3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$ je:

   A: menšie ako $\frac{1}{6}$ B: väčšie ako 0,2 C: rovné $\frac{1}{9}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

8. Číslo $3 \cdot (2{,}17 - 1{,}29 - 0{,}8)$ je:

   A: menšie ako $\frac{3}{13}$ B: rovné $\frac{6}{25}$ C: väčšie ako $\frac{2}{7}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

9. Číslo $4 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right)$ je z intervalu:

A: $\left\langle -2; -\frac{1}{2}\right)$ B: $\left\langle \frac{1}{2}; 2\right)$ C: $\left\langle 0; \frac{1}{2}\right\rangle$ D: $\left(\frac{1}{2}; 2\right\rangle$

---

10. Číslo $2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) - 0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$ je z intervalu:

A: $\left(1; \frac{7}{5}\right)$ B: $\left\langle \frac{6}{5}; 2\right\rangle$ C: $\left(\frac{7}{5}; \frac{8}{5}\right\rangle$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

11. Číslo $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) : 2$ je z intervalu:

A: $\left(-1; -\frac{1}{2}\right\rangle$ B: $\left\langle -\frac{1}{2}; 0\right\rangle$ C: $\langle 0; 1\rangle$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

12. Číslo $\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right)$ je:

A: rovné $-0{,}75$ B: väčšie ako $-\frac{1}{2}$ C: rovné $-\frac{1}{4}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

13. Číslo $3 \cdot \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\right)$ je z intervalu:

A: $\left\langle -1; -\frac{1}{4}\right)$ B: $\left(-1; -\frac{1}{4}\right\rangle$ C: $\left\langle -\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}\right\rangle$ D: $\left\langle -\frac{1}{5}; 0\right)$

---

14. Číslo $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}$ je:

A: rovné $-\frac{23}{7}$ B: menšie ako $-\frac{31}{10}$ C: väčšie ako $-\frac{23}{8}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

15. Číslo $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}$ je:

A: menšie ako $\frac{1}{5}$ B: väčšie ako $\frac{1}{4}$ C: väčšie ako $\frac{3}{7}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

16. Číslo $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}}{-\frac{3}{6}}$ je:

A: menšie ako $-2{,}3$ B: menšie ako $-2{,}1$ C: väčšie ako -2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

17. Číslo $-0{,}25$ je:

A: menšie ako $\frac{3}{2}-\frac{7}{3}$ B: väčšie ako $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$ C: rovné $\frac{5}{4}-4$ D: rovné $2-\frac{9}{4}$

---

18. Číslo $\frac{13}{7}$ je:

A: menšie ako $2+\frac{5}{2}-\frac{5}{3}-\frac{5}{4}$ B: rovné $\frac{11}{5}-\frac{5}{11}$ C: väčšie ako $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

19. Číslo $\frac{7}{13}$ je:

A: väčšie ako $2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$ B: rovné $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ C: menšie ako $\frac{7}{15}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

20. Číslo 0,2 je:

A: rovné $\frac{8}{15}-\frac{1}{3}$ B: väčšie ako $\frac{1}{4}$ C: rovné $\frac{19}{20}-\frac{1}{4}$ D: menšie ako $\frac{1}{2}-1$

2 Výrazy

2.1 Riešené príklady

Pri riešení príkladov v tejto kapitole budeme používať tieto vzorce

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \tag{2.1}$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2, \tag{2.2}$$

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B). \tag{2.3}$$

Ďalej využijeme, že pre $a, b \geqq 0$ je

$$(\sqrt{a})^2 = a, \tag{2.4}$$

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}. \tag{2.5}$$

---

1. Výraz $\dfrac{x+4}{x^2-49}$ nie je definovaný iba pre x rovné:

A: -4; 7   B: 7   C: -7; -4; 7   D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Daný výraz nie je definovaný, keď sa menovateľ zlomku rovná nule, teda ak

$$x^2 - 49 = 0.$$

Rozložme kvadratický dvojčlen na súčin. Využijeme vzorec (2.3), t. j.

$$(x-7)(x+7) = 0.$$

Súčin dvoch výrazov sa rovná nule, ak aspoň jeden z výrazov je rovný nule. Odtiaľ

$$\begin{aligned} x - 7 = 0 \quad &\vee \quad x + 7 = 0, \\ x = 7 \quad &\vee \quad x = -7. \end{aligned}$$

Výraz nie je definovaný pre $x = \pm 7$, preto je správna odpoveď D.

---

2. Výraz $\dfrac{(3x+3)(x-2)}{(x-3)(x^2+3x)}$ nie je definovaný iba pre x rovné:

A: -1; 2   B: -3; 0; 3   C: -3; 3   D: -2; 1

Riešenie. Daný výraz nie je definovaný, keď sa jeho menovateľ rovná nule, teda ak

$$(x-3)(x^2+3x) = 0.$$

Po jednoduchej úprave rovnice dostávame

$$(x-3)x(x+3)=0.$$

Súčin troch činiteľov sa rovná 0, ak aspoň jeden z nich je rovný 0. Teda, ak

$$x-3=0 \qquad \vee \qquad x=0 \qquad \vee \qquad x+3=0,$$

t. j.

$$x=3 \qquad \vee \qquad x=0 \qquad \vee \qquad x=-3.$$

Daný výraz nie je definovaný pre hodnoty $x=-3$, $x=0$ a $x=3$, a preto B je správna odpoveď.

---

3. Výraz $\dfrac{9x-x^3}{x-2}$ je rovný nule iba pre x rovné:

A: -3; 3 B: 0; 3 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Zlomok môže byť rovný nule len vtedy, ak je jeho čitateľ rovný nule. V našom prípade platí

$$\frac{9x-x^3}{x-2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x-x^3=0.$$

Rozložme dvojčlen $9x-x^3$ na súčin. Najprv vyberme x pred zátvorku a potom na základe vzorca (2.1) dostaneme

$$9x-x^3=x(9-x^2)=x(3-x)(3+x).$$

Pôvodná rovnica má takto tvar

$$x(3-x)(3+x)=0.$$

Súčin troch činiteľov sa rovná nule, ak aspoň jeden z nich je rovný nule, t. j.

$$x=0 \qquad \vee \qquad 3-x=0 \qquad \vee \qquad 3+x=0,$$

a teda

$$x=0 \qquad \vee \qquad x=3 \qquad \vee \qquad x=-3.$$

Daný zlomok je definovaný pre každú z týchto hodnôt, preto je správna odpoveď D.

Poznamenajme, že daný zlomok nie je definovaný pre $x=2$.

4. Výraz $\dfrac{3}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{x^2+2}{x-1}$ je rovný nule pre x rovné:

A: -1; 1 B: -2; 2 C: 0; 1; 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Je potrebné vyriešiť rovnicu

$$\frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{x^2+2}{x-1} = 0. \tag{2.6}$$

Podľa vzorca (2.1) platí $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = x-1$. Úpravou ľavej strany rovnice na najmenšieho spoločného menovateľa dostávame

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{x}+3-3\sqrt{x}+3-x^2-2}{x-1} &= 0, \\ \frac{4-x^2}{x-1} &= 0. \end{aligned}$$

Posledná rovnica platí, ak je čitateľ zlomku rovný nule:

$$4 - x^2 = 0$$

a podľa vzorca (2.1) máme

$$(2-x)(2+x) = 0.$$

Súčin výrazov je rovný nule, ak aspoň jeden z nich je rovný nule. V našom prípade, ak $2-x=0$ alebo $2+x=0$, teda ak $x=2$ alebo $x=-2$. Preto odpoveď B je správna.

5. Hodnota výrazu $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ pre $a=43$, $b=41$ je:

A: 84 B: 42 C: 21 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Úpravou na spoločný menovateľ sčítame zlomky a použitím vzorcov (2.1), (2.2) a (2.3) dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \\ &= \frac{a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b+a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{2a+2b}{a-b} = \frac{2(a+b)}{a-b}. \end{aligned}$$

Ak $a = 43$, $b = 41$, tak

$$\frac{2(a+b)}{a-b} = \frac{2(43+41)}{43-41} = \frac{2\cdot 84}{2} = 84.$$

Správna odpoveď je A.

---

6. Hodnota výrazu $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{z}-\sqrt{x}}$ pre $x = 6$, $z = 2$ je:

A: $-\sqrt{3}-3$ B: $3-\sqrt{3}$ C: $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Dosaďme do daného výrazu $x = 6$ a $z = 2$ a využime vzorce (2.1), (2.4) a (2.5):

$$\left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{z}-\sqrt{x}}\right]_{\substack{x=6\\z=2}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \left\{\text{výraz rozšírme vhodnou jednotkou } \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = 1\right\} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{2\sqrt{12}+2\cdot 6}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{12}+2\cdot 6}{2-6} = -\frac{2\sqrt{4}\sqrt{3}+12}{4} = -\frac{2\cdot 2\sqrt{3}+12}{4} = -\frac{4\sqrt{3}+12}{4} =$$

$$= -\frac{4(\sqrt{3}+3)}{4} = -(\sqrt{3}+3) = -\sqrt{3}-3.$$

Správna odpoveď je A.

---

7. Hodnota výrazu $\left(\dfrac{4}{3+\sqrt{8}} + 4\sqrt{8}\right)^2$ je:

A: 144 B: 121 C: $\dfrac{121}{9}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Pri úpravách použijeme vzorec (2.4)

$$\left(\frac{4}{3+\sqrt{8}} + 4\sqrt{8}\right)^2 = \left[\frac{4+4\sqrt{8}(3+\sqrt{8})}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \left[\frac{4+4\sqrt{8}\cdot 3+4\sqrt{8}\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{4+12\sqrt{8}+4\cdot 8}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \left[\frac{4+12\sqrt{8}+32}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \left[\frac{36+12\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{12\cdot 3+12\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \left[\frac{12(3+\sqrt{8})}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = 12^2 = 144.$$

Správna je odpoveď A.

8. Hodnota výrazu $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\right)^3$ je:

A: $\sqrt{35}$ B: 36 C: 216 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Využijúc vzorec (2.1) upravíme výraz v zátvorke na spoločného menovateľa

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\right)^3 = \left[\frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}+\sqrt{5}) - \sqrt{5}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}\right]^3 =$$

$$= \left[\frac{7+\sqrt{7}\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{7}+5}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}\right]^3 = \left(\frac{7+5}{7-5}\right)^3 = 6^3 = 216.$$

Správna odpoveď je C.

2.2 Úlohy

1. Výraz $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ nie je definovaný iba pre x rovné:

A: -2; -1; 1; 2 B: -2; 1; 2 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

2. Výraz $\frac{x-5}{x^2-25}$ nie je definovaný iba pre x rovné:

A: -5 B: -5; 5 C: 5 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

3. Výraz $\frac{x-3}{x^2-3}$ nie je definovaný iba pre x rovné:

A: -3; 3 B: $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$ C: $\sqrt{3}$ D: 3

4. Výraz $\frac{(x-2)(x-3)x}{(x^2-2x)(x-3)^2}$ nie je definovaný iba pre x rovné:

A: 3 B: 2; 3 C: 0; 2; 3 D: -3; 0; 2; 3

5. Výraz $\frac{2x-5}{(4x-x^2)(x+5)}$ nie je definovaný pre x rovné:

A: -5; 0; 4 B: -4; 0; 5 C: 0; 4; 5 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

6. Výraz $\dfrac{2x+2}{(x^2+2x)(x-2)}$ nie je definovaný iba pre x rovné:

A: -2; 0; 2 B: -2; 2 C: -1 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

7. Výraz $\dfrac{(5x-1)(2-x^2)}{(3-x^2)(x+3)}$ nie je definovaný pre x rovné:

A: $-\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{5}$; $\sqrt{2}$ B: $-\sqrt{2}$; $-\dfrac{1}{5}$; $\sqrt{2}$ C: $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 3 D: -3; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$

---

8. Hodnota výrazu $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ pre $x=3$, $y=2$ je:

A: 1 B: $\dfrac{1}{5}$ C: $5-2\sqrt{6}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

9. Hodnota výrazu $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$ pre $x=5$, $y=10$ je:

A: $\sqrt{2}-1$ B: $1-\sqrt{2}$ C: $\dfrac{\sqrt{2}+1}{5}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

10. Hodnota výrazu $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ pre $x=33$, $y=31$ je:

A: 16 B: 32 C: 64 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

11. Hodnota výrazu $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\dfrac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}}$ pre $x=11$, $y=7$ je:

A: 5 B: 10 C: $\dfrac{32}{3}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

12. Hodnota výrazu $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ pre $x=19$, $y=17$ je:

A: -18 B: $-\dfrac{1}{18}$ C: $\dfrac{1}{18}$ D: 18

---

13. Hodnota výrazu $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)^2$ pre $x=1$, $y=2$ je:

A: 0 B: $6-4\sqrt{2}$ C: $\dfrac{2}{3}$ D: $6+4\sqrt{2}$

---

14. Hodnota výrazu $\sqrt{2\sqrt{5}-\dfrac{2}{2+\sqrt{5}}}$ je:

A: 1 B: 2 C: 3 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

15. Výraz $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$ je rovný nule pre x rovné:

A: -1 B: 0 C: 1 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

16. Výraz $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x+3}{x^2-4}$ je rovný nule pre x rovné:

A: -1 B: 0 C: 1 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

17. Výraz $\dfrac{x^2+x}{x-3}+\dfrac{16+x}{3-x}$ je rovný nule pre x rovné:

A: -4; 4 B: 3 C: 3; 4 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

18. Výraz $\dfrac{x^2+8}{x-2}-\dfrac{2}{4-2x}$ je rovný nule pre x rovné:

A: -3; 3 B: 2 C: 3 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

19. Výraz $\dfrac{x+2}{3+x}+\dfrac{x-2}{3-x}$ je rovný:

A: $\dfrac{2x}{x^2-9}$ B: $\dfrac{2x}{9-x^2}$ C: $\dfrac{2-x}{9-x^2}$ D: $\dfrac{2+x}{x^2-9}$

---

20. Výraz $\dfrac{x}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{x}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{x}{x-4}$ je rovný:

A: $\dfrac{3x}{x-4}$ B: $\dfrac{2x\sqrt{x}-x}{x-4}$ C: $\dfrac{5x}{x-4}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

3 Riešenie lineárnych rovníc a ich sústav

3.1 Riešené príklady

---

1. Počet koreňov rovnice $\dfrac{3x+2}{x+4}+4=\dfrac{8x+22}{x+4}$ v množine reálnych čísel je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Zlomky v danej rovnici majú zmysel pre

$$x+4\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -4.$$

Pri riešení rovnice najprv odstráňme zlomky a ďalšími ekvivalentnými úpravami vyjadríme neznámu x.

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{x+4}+4 &= \frac{8x+22}{x+4}, \qquad / \cdot (x+4)\\
3x+2+4(x+4) &= 8x+22,\\
3x+2+4x+16 &= 8x+22,\\
7x+18 &= 8x+22,\\
-x &= 4,\\
x &= -4.
\end{aligned}$$

Keďže pre $x=-4$ zlomky v rovnici nie sú definované, množina všetkých jej riešení je prázdna. Správna odpoveď je A.

---

2. Rovnica $3x+4a-7=x+5$ má jeden reálny koreň $x_0=-1$ pre parameter a rovný:

   A: 7,5 B: 3,5 C: 1 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Keďže $x_0=-1$ je koreňom danej rovnice, po dosadení do rovnice musí platiť

$$3\cdot(-1)+4a-7=-1+5.$$

Potom

$$\begin{aligned}
-3+4a-7 &= 4,\\
4a-10 &= 4,\\
4a &= 14,\\
a &= \frac{14}{4}=\frac{7}{2}=3{,}5.
\end{aligned}$$

Teda správna je odpoveď B.

3. Rovnica $5x+7+a(3x-11) = 2(x-a)$ má jeden reálny koreň $x_0 = \dfrac{13}{3}$ pre parameter a rovný:

   A: 5 B: -5 C: $\dfrac{1}{5}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Dosadením koreňa $x_0 = \dfrac{13}{3}$ do zadanej rovnice dostávame rovnicu, v ktorej neznámou je parameter a.

$$5 \cdot \frac{13}{3} + 7 + a\left(3 \cdot \frac{13}{3} - 11\right) = 2\left(\frac{13}{3} - a\right).$$

Ekvivalnetnými úpravami tejto rovnice vypočítame hodnotu parametra a.

$$\begin{aligned}
\frac{65}{3} + 7 + 2a =& \frac{26}{3} - 2a, \\
4a =& \frac{26}{3} - \frac{65}{3} - 7, \\
4a =& \frac{26 - 65 - 21}{3}, \\
4a =& -\frac{60}{3}, \\
4a =& -20, \\
a =& -5.
\end{aligned}$$

Správna je odpoveď B.

---

4. Počet všetkých riešení rovnice $3x - 5 + a(3 - x) = 2(a - x)$ pre hodnotu parametra $a = 5$ je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Po dosadení hodnoty parametra $a = 5$ do zadanej rovnice dostávame rovnicu

$$3x - 5 + 5(3 - x) = 2(5 - x).$$

Po úpravách ľavej a pravej strany rovnice dostávame

$$\begin{aligned}
3x - 5 + 15 - 5x =& 10 - 2x, \\
-2x + 10 =& 10 - 2x.
\end{aligned}$$

V poslednej rovnici sa ľavá strana rovná pravej pre ľubovoľné reálne číslo x. Znamená to, že pre $a = 5$ má daná rovnica nekonečne veľa riešení.

Preto odpovede A, B a C nie sú správne. Správna odpoveď je D.

5. Výraz $\dfrac{2x-3}{5x+4}$ má hodnotu $-\dfrac{1}{2}$ pre x rovné:

A: $-\dfrac{4}{5}$ B: $\dfrac{2}{3}$ C: 10 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Ak chceme zistiť, pre akú hodnotu x sa dané výrazy rovnajú, je potrebné riešiť rovnicu

$$\frac{2x-3}{5x+4} = -\frac{1}{2}.$$

Rovnica má zmysel pre

$$5x+4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -\frac{4}{5}.$$

Danú rovnicu vyriešime takto:

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{5x+4} &= -\frac{1}{2}, \quad / \cdot 2(5x+4) \\ 2 \cdot (2x-3) &= -1 \cdot (5x+4), \\ 4x-6 &= -5x-4, \\ 9x &= 2, \\ x &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Výrazy v rovnici sú definované pre všetky x z množiny reálnych čísel okrem $x = -\dfrac{4}{5}$. Preto $x = \dfrac{2}{9}$ je riešením danej rovnice.

Keďže

$$\begin{aligned} \frac{2}{9} \neq -\frac{4}{5} \quad &\Rightarrow \quad \text{odpoveď A nie je správna,} \\ \frac{2}{9} \neq \frac{2}{3} \quad &\Rightarrow \quad \text{odpoveď B nie je správna,} \\ \frac{2}{9} \neq 10 \quad &\Rightarrow \quad \text{odpoveď C nie je správna,} \end{aligned}$$

dostávame, že správna odpoveď je D.

Poznámka. Pri riešení sme vykonali len ekvivalentné úpravy, preto skúška nie je nevyhnutnou súčasťou riešenia.

---

6. Sústava

$$\begin{aligned} 2x+5y &= -1 \\ x-4y &= 6 \end{aligned}$$

má v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jediné riešenie $[x_0; y_0]$, pre ktoré platí:

A: $2x_0 + y_0 = 4$ B: $2x_0 + y_0 = 3$ C: $2x_0 + y_0 = 2$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Sústavu môžeme riešiť napríklad vylučovacou metódou. Najjednoduchšie je vyjadriť z druhej rovnice neznámu x:

$$x = 6 + 4y.$$

Ak týmto nahradíme x v prvej rovnici dostaneme

$$2(6 + 4y) + 5y = -1.$$

Túto rovnicu vyriešime ekvivalentnými úpravami

$$\begin{aligned} 12 + 8y + 5y &= -1, \\ 13y &= -13, \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Dosadením $y = -1$ do vzťahu $x = 6 + 4y$ získame hodnotu neznámej x:

$$x = 6 + 4y = 6 + 4 \cdot (-1) = 2.$$

Riešením danej sústavy je usporiadaná dvojica $[x_0; y_0] = [2; -1]$. Potom

$$2x_0 + y_0 = 2 \cdot 2 + (-1) = 3,$$

teda správna je odpoveď B.

---

7. Sústava

$$\begin{aligned} 13x - 11y &= -59 \\ 5x + 7y &= 11 \end{aligned}$$

má v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jediné riešenie $[x_0; y_0]$, pre ktoré platí:

A: $3x_0 + 2y_0 = 0$ B: $3x_0 + 2y_0 = -4$ C: $3x_0 + 2y_0 = 2$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Sústavu môžeme riešiť napríklad sčítacou metódou. Jednotlivé rovnice vynásobíme vhodnými číslami tak, aby sme po sčítaní rovníc získali rovnicu s jednou neznámou.

$$\begin{array}{ll} 13x - 11y = -59 & / \cdot 7 \\ 5x + 7y = 11 & / \cdot 11 \\ \hline \left.\begin{array}{l} 91x - 77y = -413 \\ 55x + 77y = 121 \end{array}\right\} + & \\ \hline \end{array}$$

$$146x = -292 \qquad \Rightarrow \qquad x = -2.$$

Dosadením $x = -2$ napríklad do druhej rovnice zadanej sústavy dostaneme hodnotu neznámej y

$$\begin{aligned} 5 \cdot (-2) + 7y &= 11, \\ 7y &= 21, \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Riešením danej sústavy je usporiadaná dvojica $[x_0; y_0] = [-2; 3]$, pre ktorú platí:

$$3x_0 + 2y_0 = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = -6 + 6 = 0.$$

Správna odpoveď je A.

---

8. Určte dve čísla, ktorých súčet je 64. Tento súčet sa nezmení, ak zmenšíme jedno z nich o jeho tretinu a druhé zväčšíme o jeho pätinu. Súčin hľadaných čísel je:

   A: 768 B: 800 C: 960 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Nech x, y sú hľadané prirodzené čísla. Potom z textu príkladu je

$$\begin{aligned} x + y &= 64, \\ \left(x - \frac{x}{3}\right) + \left(y + \frac{y}{5}\right) &= 64. \end{aligned}$$

Po úprave druhej rovnice v sústave dostaneme

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 64, \\ \frac{2x}{3} + \frac{6y}{5} &= 64. \end{aligned}$$

Sústavu môžeme riešiť napríklad sčítacou metódou. Vytvoríme vhodné násobky rovníc tak, aby sa po sčítaní rovníc jedna neznáma vylúčila.

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 64 & / \cdot (-10) \\ \frac{2x}{3} + \frac{6y}{5} &= 64 & / \cdot 15 \\ \hline -10x - 10y &= -640 & \\ 10x + 18y &= 960 & \Big\}+ \\ \hline 8y &= 320 & \Rightarrow \quad y = 40. \end{aligned}$$

Z rovnice $x + y = 64$ pre neznámu x dostávame

$$\begin{aligned} x &= 64 - y, \\ x &= 64 - 40, \\ x &= 24. \end{aligned}$$

Hľadané prirodzené čísla sú 24 a 40. Ich súčin je $24 \cdot 40 = 960$. Správna odpoveď je C.

9. Počet reálnych riešení sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4, \\ -4x + 6y &= 8, \end{aligned}$$

je práve:

A: 0 B: 1 C: 2 D: ∞

Riešenie. Vyjadrime z prvej rovnice sústavy výraz

$$2x = 3y + 4$$

a dosaďme ho po vynásobení číslom -2 do ľavej strany druhej rovnice:

$$-4x + 6y = -2 \cdot 2x + 6y = -2(3y + 4) + 6y = -6y - 8 + 6y = -8.$$

Porovnaním upravenej ľavej strany 2. rovnice s jej pravou stranou dostávame:

$$-8 = 8.$$

Táto rovnosť neplatí (pre žiadne x a y), a teda sústava rovníc nemá riešenie. Správna je odpoveď A.

Odpoveď C by sme mohli zamietnuť aj bez výpočtov, pretože sústava lineárnych rovníc nikdy nemôže mať práve dve reálne riešenia.

Ak by sme v sústave zmenili len znamienko na pravej strane druhej rovnice, dostali by sme rovnosť

$$-8 = -8,$$

ktorá na rozdiel od nami uvažovaného prípadu platí vždy, t. j. aj pre ľubovoľné hodnoty x a y. V tom prípade by sústava rovníc mala nekonečne veľa riešení, spojených vzťahom

$$2x = 3y + 4.$$

3.2 Úlohy

1. Sústava

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -10 \\ -3x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

má v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jediné riešenie $[x_0, y_0]$, pre ktoré platí:

A: $x_0 + y_0 = 3$ B: $x_0 + y_0 = 4$ C: $x_0 + y_0 = 5$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

2. Sústava

$$\begin{aligned} x + 5y &= 6 \\ -5x - 10y &= -15 \end{aligned}$$

má v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jediné riešenie $[x_0, y_0]$, pre ktoré platí:

A: $2x_0 - y_0 = 0$ B: $2x_0 - y_0 = 1$ C: $2x_0 - y_0 = 2$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

3. Sústava
$$\begin{aligned} 3x + y &= 3 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$$
má v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jediné riešenie $[x_0, y_0]$, pre ktoré platí:

A: $x_0 \cdot y_0 = \frac{1}{2}$ B: $x_0 \cdot y_0 = 1$ C: $x_0 \cdot y_0 = 2$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

4. Sústava
$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -3 \\ 5x - y &= 3 \end{aligned}$$
má v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jediné riešenie $[x_0, y_0]$, pre ktoré platí:

A: $3x_0 + 2y_0 = 6$ B: $3x_0 + 2y_0 = 7$ C: $3x_0 + 2y_0 = 8$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

5. Sústava
$$\begin{aligned} 11x + 5y &= 1 \\ -4x - y &= -2 \end{aligned}$$
má v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jediné riešenie $[x_0, y_0]$, pre ktoré platí:

A: $2x_0 - 3y_0 = -7$ B: $2x_0 - 3y_0 = 4$ C: $2x_0 - 3y_0 = 8$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

6. Počet koreňov rovnice $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 0$ v množine reálnych čísel je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

7. Počet koreňov rovnice $\frac{5x+4}{x+5} - 1 = \frac{-1+3x}{x+5}$ v množine reálnych čísel je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

8. Počet koreňov rovnice $\frac{-x+3}{x+2} + 4 = \frac{x+1}{x+2}$ v množine prirodzených čísel je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

9. Počet koreňov rovnice $3(x+7) - 2(5-x) = 5(x-1) + 4(1+x)$ v množine celých čísel je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

10. Počet koreňov rovnice $7(x+1)-5(x-3)+3(11+x)=0$ v množine prirodzených čísel je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

11. Počet všetkých riešení rovnice $7x-11-a(13-5x)=2(x-a)$ pre hodnotu parametra $a=-1$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

12. Rovnica $a(3x-5)-(5x-3)=3-a$ má jeden reálny koreň $x_0=\frac{2}{3}$ pre parameter a rovný:

A: $-\frac{5}{3}$ B: $\frac{3}{5}$ C: $\frac{5}{3}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

13. Rovnica $7x+13-a(13-5x)=2(x-a)$ má jeden reálny koreň $x_0=\frac{3}{5}$ pre parameter a rovný:

A: -2 B: $\frac{5}{3}$ C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

14. Rovnica $a(x+7)-3=-x-4$ má jeden reálny koreň $x_0=-3$ pre parameter a rovný:

A: -1 B: 0,5 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

15. Výraz $\dfrac{a(x^2-4)}{a^2-(a+3)^2}$ nie je definovaný pre a rovné:

A: -2; 2 B: $-\frac{3}{2}$ C: 0 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

16. Výraz $\dfrac{x-7}{x-4}+\dfrac{2}{8-2x}$ má hodnotu 5 pre x rovné:

A: -3 B: 1 C: 3 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

17. Výraz $\dfrac{x-7}{x+4}$ sa rovná výrazu $\dfrac{2x-3}{x+4}$ pre x rovné:

A: -4 B: -2 C: $\frac{3}{7}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

18. Súčet dvoch reálnych čísel je $\frac{26}{5}$ a ich rozdiel je $\frac{24}{5}\cdot$ Súčin týchto čísel je:

A: $\frac{1}{5}$ B: 1 C: 5 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

19. V triede je 28 žiakov. Ak by chlapcov bolo o 6 menej, bolo by ich toľko, koľko je dievčat. Počet dievčat v triede je:

A: 8 B: 11 C: 17 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

20. Dekan fakulty rozdelil mimoriadne prospechové štipendium v celkovej sume 1 000 eur trom študentom. Prvý študent dostal dvakrát viac, ako tretí. Tretí dostal o 40 eur menej ako druhý. Tretí študent dostal mimoriadne prospechové štipendium vo výške:

A: 280 € B: 240 € C: 480 € D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

4 Riešenie lineárnych nerovníc a nerovníc v súčinovom a podielovom tvare

4.1 Riešené príklady

---

1. Riešením nerovnice $\dfrac{7x-1}{2} - \dfrac{5-x}{4} < 3x - \dfrac{x+2}{3}$ na množine reálnych čísel je interval:

   A: $(-\infty; -1)$ B: $(-\infty; 1)$ C: $(1; \infty)$ D: $\langle 1; \infty)$

Riešenie. Najprv „odstránime zlomky“: vynásobíme obe strany nerovnice najmenším spoločným násobkom menovateľov, t. j. číslom 12 – nerovnosť sa pritom zachová. Dostaneme nerovnicu

$$6(7x-1) - 3(5-x) < 36x - 4(x+2),$$

ktorá po roznásobení má tvar

$$42x - 6 - 15 + 3x < 36x - 4x - 8.$$

Po jednoduchých úpravách (členy, ktoré obsahujú x dáme na jednu stranu nerovnice a čísla na druhú stranu) vznikne nerovnica

$$13x < 13 \quad /: 13$$

a teda $x < 1$, t. j. $x \in (-\infty; 1)$. Správna je odpoveď B.

---

2. Riešením nerovnice $4x - 4x^2 - 1 \geqq 0$ v množine reálnych čísel je:

   A: $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ B: $\left(\dfrac{1}{2}; \infty\right)$ C: $\langle 0; \infty)$ D: $\langle 1; \infty)$

Riešenie. Uvedieme jeden z možných postupov vyriešenia tejto úlohy. Doplníme kvadratický trojčlen $4x - 4x^2 - 1$ na úplný štvorec s využitím vzorca

$$x^2 - px = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Najprv vyberieme pred zátvorku koeficient -4 pri kvadratickom člene:

$$4x - 4x^2 - 1 = -4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Takto môžeme danú nerovnicu zapísať v ekvivalentnom tvare

$$-4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0.$$

Výraz na ľavej strane tejto nerovnice nemôže nadobúdať kladné hodnoty (lebo druhá mocnina dáva len nezáporné hodnoty), a preto je táto nerovnica splnená len v tých bodoch, v ktorých je $x - \frac{1}{2} = 0$. Teda $x = \frac{1}{2}$ je jediné riešenie danej nerovnice. Správna odpoveď je A.

Keby sme túto nerovnicu riešili intervalovou metódou, tak na číselnej osi by sme plným krúžkom vyznačili len jeden nulový bod výrazu $V(x) = 4x - 4x^2 - 1$, a to bod $\frac{1}{2}$. Ďalej by sme zistili, že naľavo a aj napravo od bodu $\frac{1}{2}$ je výraz $V(x)$ záporný. V samotnom bode $\frac{1}{2}$ je však jeho hodnota rovná nule. Vzhľadom na riešenú nerovnicu by sme dostali rovnaký záver ako v predchádzajúcom postupe.

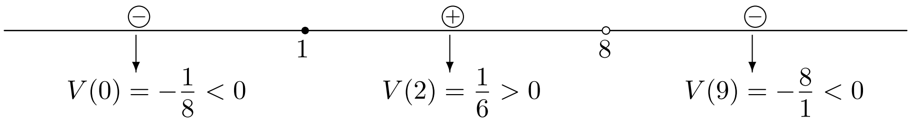
---

3. Počet prirodzených čísel, ktoré vyhovujú nerovnici $\dfrac{x-1}{8-x} \geqq 0$ je:

   A: 1   B: 8   C: 6   D: 7

Riešenie. Najprv vyriešime nerovnicu v množine reálnych čísel. Použijeme napríklad intervalovú metódu. Pomocou nej zistíme, na akej množine je výraz $V(x) = \dfrac{x-1}{8-x}$ nezáporný. Tento výraz môže „meniť znamienko“ len v bode $x = 8$ (čo je nulový bod jeho menovateľa, v ktorom daný výraz nie je definovaný) alebo v bode $x = 1$ (čo je nulový bod jeho čitateľa, pretože $V(1) = 0$). Číslo 1 je z oboru pravdivosti danej nerovnice (neostrá nerovnica). Preto na číselnej osi znázorníme bod 1 plným krúžkom a bod 8 prázdnym krúžkom (pozri obrázok).

riešená nerovnica: $V(x) = \dfrac{x-1}{8-x} \geqq 0$



Dostali sme tri intervaly: $(-\infty; 1\rangle$, $(1; 8)$ a $\langle 8; \infty)$. Z vnútra každého z nich zvolíme ľubovoľný bod a vyčíslime v ňom hodnotu výrazu $V(x) = \dfrac{x-1}{8-x}$. Na obrázku sme postupne znázornili vyčíslené hodnoty $V(0)$, $V(2)$ a $V(9)$, pričom nad zodpovedajúcim intervalom sme zapísali v krúžku znamienko plus, ak nám vyšla kladná hodnota a znamienko mínus v prípade zápornej hodnoty. Zistili sme, že výraz $V(x)$ je nezáporný na intervale $\langle 1; 8)$. Tento interval je riešením danej nerovnice na množine reálnych čísel. Ľahko overíme, že do tohto intervalu patrí práve sedem prirodzených čísel. Správna odpoveď je D.

---

4. Rozhodnite, ktorý interval obsahuje aspoň jedno riešenie nerovnice $(x+2)(x+5) < (6-x)(x+5)$:

   A: $(-\infty; -7)$ B: $(-7; -3)$ C: $(3; 7)$ D: $(7; \infty)$

Riešenie. Po prenesení všetkých výrazov na ľavú stranu

$$(x+2)(x+5) < (6-x)(x+5) \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x+5) - (6-x)(x+5) < 0$$

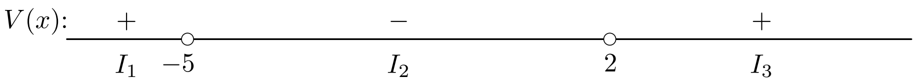
a po úprave dostávame nerovnicu

$$2(x-2)(x+5) < 0.$$

Nulové body výrazu $V(x) = 2(x-2)(x+5)$ sú $x_1 = -5$ a $x_2 = 2$. Na číselnej osi ich vyznačíme prázdnym krúžkom, pretože nevyhovujú ostrej nerovnosti. Určíme znamienka výrazu $V(x)$ vo vhodne vybraných vnútorných bodoch intervalov

$$I_1 = (-\infty; -5), \qquad I_2 = (-5; 2) \quad \text{a} \quad I_3 = (2; \infty),$$

ktoré vznikli rozdelením číselnej osi nulovými bodmi. V každom intervale stačí použiť jeden bod (napríklad môžeme použiť body -6, 0 a 3).



Len na intervale I_2 sú hodnoty výrazu $V(x)$ menšie ako 0, preto obor pravdivosti nerovnice je otvorený interval $(-5; 2)$.

Keďže $(-\infty; -7) \cap (-5; 2) = \emptyset$, $(3; 7) \cap (-5; 2) = \emptyset$ a $(7; \infty) \cap (-5; 2) = \emptyset$, odpovede A, C a D sú nesprávne. Pretože $(-7; -3) \cap (-5; 2) = (-5; -3)$, tak interval $(-7; -3)$ obsahuje aspoň jedno riešenie nerovnice, napríklad bod -4. Správna je odpoveď B.

---

5. Rozhodnite, ktorý interval neobsahuje žiadne riešenie nerovnice $\dfrac{1}{x+2} \geqq \dfrac{2}{1-x}$:

A: $(-5; -3)$ B: $(-2; 0)$ C: $(0; 2)$ D: $(3; 5)$

Riešenie. Zlomok z pravej strany nerovnice prenesieme na ľavú stranu nerovnice

$$\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} \geqq 0$$

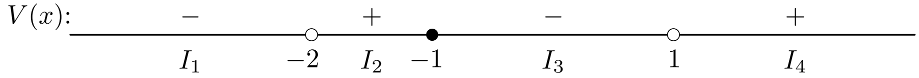
a upravíme ju na spoločného menovateľa

$$\frac{x-1+2(x+2)}{(x+2)(x-1)} \geqq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad V(x) = \frac{3(x+1)}{(x+2)(x-1)} \geqq 0.$$

Nulové body čitateľa (-1) a menovateľa (-2 a 1) výrazu $V(x)$ delia číselnú os na 4 intervaly (nulový bod $x = -1$ môžeme priradiť aj intervalu I_2 namiesto I_3, prípadne aj obidvom):

$$I_1 = (-\infty; -2), \qquad I_2 = (-2; -1), \qquad I_3 = \langle -1; 1) \quad \text{a} \quad I_4 = (1; \infty).$$

Na obrázku, vzhľadom na neostrú nerovnosť, bod $x = -1$ vyznačíme ako riešenie plným krúžkom, nulové body menovateľa nepatria do definičného oboru nerovnice a označíme ich prázdnym krúžkom. Na každom intervale stačí overiť platnosť nerovnosti určením znamienka výrazu $V(x)$ na ľavej strane v jednom vnútornom bode.



Ľahko sa presvedčíme, že požadovaná nerovnosť platí na intervaloch I_2, I_4 a v bode $x = -1$, a teda

$$P = (-2; -1) \cup \{-1\} \cup (1; \infty) = (-2; -1\rangle \cup (1; \infty).$$

Na záver ešte skonštatujeme, že prieniky intervalov v odpovediach B, C a D s oborom pravdivosti sú neprázdne množiny a $(-5; -3) \cap P = \emptyset$. Preto je správna odpoveď A.

---

6. Nech a je vhodné reálne číslo. Potom oborom pravdivosti nerovnice

$$3(x + 2)(2x - 1) \geqq 2(x - 2)(3x + 1)$$

na množine reálnych čísel je interval v tvare:

A: $(-\infty; a)$ B: $(-\infty; a\rangle$ C: $\langle a; \infty)$ D: $(a; \infty)$

Riešenie. Výrazy na obidvoch stranách roznásobíme a nerovnicu zjednodušíme:

$$6x^2 + 9x - 6 \geqq 6x^2 - 10x - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 19x \geqq 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqq \frac{2}{19}.$$

Teda obor pravdivosti je interval $\left\langle \frac{2}{19}; \infty \right)$. Ak zvolíme $a = \frac{2}{19}$, presvedčíme sa, že správna odpoveď je C.

---

7. Množina riešení nerovnice $(2x+5)^2(x-4) \geqq 0$ na množine reálnych čísel obsahuje:

A: celé záporné číslo B: záporné racionálne nie celé číslo C: záporné iracionálne číslo D: číslo 0

Riešenie. Nerovnicu upravíme na tvar so súčinom koreňových činiteľov:

$$(2x + 5)^2(x - 4) \geqq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad V(x) = 4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 (x - 4) \geqq 0.$$

Nulové body výrazu $V(x)$ sú $x_1 = -\frac{5}{2}$ a $x_2 = 4$. Na číselnej osi ich vyznačíme plným krúžkom, keďže vyhovujú požadovanej nerovnosti a sú riešeniami nerovnice. Overíme znamienka výrazu $V(x)$ vo vhodných vnútorných bodoch intervalov

$$I_1 = \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right), \qquad I_2 = \left(-\frac{5}{2}; 4\right) \quad \text{a} \quad I_3 = (4; \infty),$$

ktoré vznikli rozdelením číselnej osi nulovými bodmi. V každom intervale stačí použiť jeden bod, napríklad je možné zvoliť body -3, 0 a 5.

	I_1	$-\frac{5}{2}$	I_2	4	I_3
$V(x)$:	$-$		$-$		$+$

Keďže len na intervale I_3 sú hodnoty väčšie ako 0, obor pravdivosti nerovnice je zjednotenie

$$\left\{-\frac{5}{2}\right\} \cup \langle 4; \infty).$$

Môžeme konštatovať, že 0 nie je riešením, a teda odpoveď D je nesprávna. Jediným záporným riešením je zlomok $x = -\frac{5}{2}$. Keďže číslo $-\frac{5}{2}$ nie je ani celé ani iracionálne, odpovede A a C sú nesprávne. Číslo $-\frac{5}{2}$ je záporné racionálne nie celé číslo. Správna je odpoveď B.

---

8. Riešením nerovnice $4x^3 + 3x^4 \leqq x^5$ na množine reálnych čísel je množina:

A: $\langle -1; 0\rangle \cup \langle 4; \infty)$ B: $(-1; 0) \cup (4; \infty)$ C: $\langle 4; \infty)$ D: $\langle -1; 0\rangle$

Riešenie. Danú nerovnicu vyriešime intervalovou metódou. Preto na jednej jej strane „vyrobíme nulu", napríklad prenesením výrazu x^5 na ľavú stranu. Dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$4x^3 + 3x^4 - x^5 \leqq 0.$$

Najprv vyriešime zodpovedajúcu rovnicu $4x^3 + 3x^4 - x^5 = 0$. K tomu je vhodné zapísať polynóm $P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5$ v tvare súčinu koreňových činiteľov. Tu nám pomôže „vytknutie výrazu x^3 pred zátvorku":

$$4x^3 + 3x^4 - x^5 = x^3\left(4 + 3x - x^2\right).$$

Získaný činiteľ $4 + 3x - x^2$ je rovný nule práve v koreňoch kvadratickej rovnice

$$4 + 3x - x^2 = 0$$

s diskriminantom rovným 25. Ľahko sa presvedčíme, že jej korene sú 4 a -1. Potom zo známeho rozkladu kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov dostaneme

$$4 + 3x - x^2 = (-1)(x - 4)(x + 1) = (x + 1)(4 - x).$$

Takto dostaneme požadovaný rozklad polynómu P na súčin koreňových činiteľov:

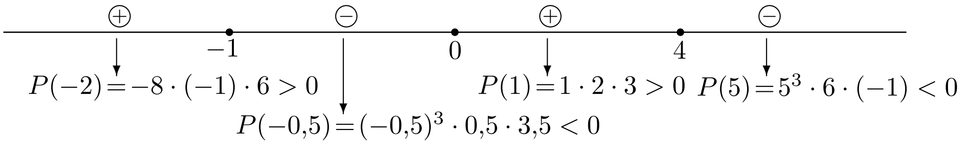
$$P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5 = x^3(x + 1)(4 - x).$$

Odtiaľ ľahko získame nulové body (korene) tohto polynómu:

$$P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5 = x^3(x + 1)(4 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \vee x = -1 \vee x = 4).$$

Tieto korene zakreslíme na číselnej osi plnými krúžkami, lebo riešime „neostrú nerovnicu“ (pozri obrázok). Kvôli lepšiemu prehľadu sme nad číselnou osou zapísali aj riešenú nerovnicu:

riešená nerovnica: $P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5 = x^3(x+1)(4-x) \leqq 0$



Body -1, 0 a 4 rozdelili číselnú os na štyri intervaly (všimnite si, že sme na číselnej osi nezachovali mierku – tá tu nie je podstatná). Z vnútra každého intervalu zvolíme ľubovoľný bod a určíme v ňom znamienko hodnoty polynómu (pre nás je dôležité to, či táto hodnota je kladná alebo záporná) s využitím rozkladu polynómu na súčin koreňových činiteľov:

$$P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5 = x^3(x+1)(4-x).$$

Z intervalu $(-\infty; -1)$ sme zvolili bod -2 a zistili sme znamienko hodnoty $P(-2)$. Všímali sme si len znamienka hodnôt jednotlivých činiteľov v bode -2. Prvý činiteľ x^3 nadobúda v bode -2 zápornú hodnotu (konkrétne -8), druhý činiteľ $(x+1)$ tiež zápornú (-1) a tretí činiteľ $(4-x)$ kladnú hodnotu (6). Tieto informácie sme na obrázku zapísali pod skúmaným intervalom $(-\infty; -1)$ v tvare $P(-2) = -8 \cdot (-1) \cdot 6 > 0$. Teda polynóm P nadobúda na tomto intervale len kladné hodnoty. Podobným spôsobom sme sa vysporiadali aj so zvyšnými intervalmi.

Na obrázku vidno, že polynóm $P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5$ je menší alebo rovný ako nula na množine $\langle -1; 0\rangle \cup \langle 4; \infty)$, a preto správna odpoveď je A.

4.2 Úlohy

---

1. Počet riešení nerovnice $\dfrac{2x}{2x+11} \geqq \dfrac{3x-1}{3x-11}$ na množine prirodzených čísel je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

---

2. Počet riešení nerovnice $\dfrac{x}{x-3} \geqq \dfrac{x+2}{x-7}$ na množine celých kladných čísel je:

   A: 1 B: 3 C: 4 D: 6

---

3. Počet nezáporných celočíselných riešení nerovnice $\dfrac{x+1}{x+5} \geqq \dfrac{x-1}{x-5}$ je:

   A: 0 B: 1 C: 3 D: 5

4. Súčet záporných celočíselných riešení nerovnice $\dfrac{x+1}{x+5} > \dfrac{x-1}{x+5}$ je:

A: -15 B: -10 C: -5 D: -3

---

5. Súčet všetkých riešení nerovnice $\dfrac{x-1}{x-2} > \dfrac{x+1}{x-4}$ na množine kladných celých čísel je:

A: 3 B: 4 C: 5 D: 6

---

6. Súčet všetkých celočíselných riešení nerovnice $(x-1)(x-5) \geqq (3x-7)(x-5)$ nie je deliteľný číslom:

A: 2 B: 4 C: 6 D: 8

---

7. Počet riešení nerovnice $(x+5)(8x-3) \leqq (2x-1)(4x+7)$ na množine celých kladných čísel je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

---

8. Počet záporných celočíselných riešení nerovnice

$$(x+3)(x-3)(3x+1) \geqq (x+3)(x-3)(2x-2)$$

je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

---

9. Súčet všetkých celočíselných riešení nerovnice $(x+2)(x+8) \geqq (4x-25)(x+8)$ je deliteľný číslom:

A: 2 B: 3 C: 4 D: 5

---

10. Počet celých kladných riešení nerovnice $(x-4)(6x+5) > (3x+3)(2x+7)$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

---

11. Riešením nerovnice $\dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6} \leqq \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2}$ na množine reálnych čísel je interval:

A: $(2;\infty)$ B: $(0;2\rangle$ C: $(0;2)$ D: $\langle 2;\infty)$

---

12. Riešením nerovnice $3(x^2-4x+5) > (1+3x)(x-2)$ na množine reálnych čísel je interval:

A: $\left(\dfrac{17}{7};\infty\right)$ B: $\left(-\infty;\dfrac{17}{7}\right)$ C: $\left(-\infty;\dfrac{7}{17}\right)$ D: $\left(-\dfrac{7}{17};\infty\right)$

13. Riešením nerovnice $x^2 + 4x < 8x - 15$ na množine reálnych čísel je:

A: $(0; 4)$ B: $(8; 15)$ C: prázdna množina D: množina reálnych čísel

---

14. Riešením nerovnice $x^2 < 2x$ na množine reálnych čísel je:

A: $(-\infty; 2)$ B: $(2; \infty)$ C: prázdna množina D: $(0; 2)$

---

15. Riešením nerovnice $6 - 3x^2 - 7x \geqq 0$ na množine reálnych čísel je interval:

A: $(-\infty; -3\rangle$ B: $\left\langle -\dfrac{2}{3}; 3 \right\rangle$ C: $\left\langle -3; \dfrac{2}{3} \right\rangle$ D: $\langle -3; 3)$

---

16. Riešením nerovnice $6 + 3x^2 - 7x \geqq 0$ na množine reálnych čísel je:

A: množina reálnych čísel B: $\left\langle \dfrac{2}{3}; 3 \right\rangle$ C: $\left\langle -3; -\dfrac{2}{3} \right\rangle$ D: $\langle 0; 3\rangle$

---

17. Riešením nerovnice $9x^2 + 4 \leqq 12x$ na množine reálnych čísel je:

A: prázdna množina B: $\left\{ \dfrac{2}{3} \right\}$ C: $\left\langle 0; \dfrac{2}{3} \right\rangle$ D: $\left\langle 0; \dfrac{3}{2} \right\rangle$

---

18. Počet celých čísel, ktoré vyhovujú nerovnici $3x^2 \leqq 2x + 5$, je:

A: 3 B: 4 C: 2 D: 1

---

19. Počet párnych čísel, ktoré vyhovujú nerovnici $\dfrac{8 - x}{x + 4} > 0$, je:

A: 2 B: 3 C: 4 D: 5

---

20. Riešením nerovnice $\dfrac{1}{x + 2} \geqq \dfrac{1}{x - 1}$ na množine reálnych čísel je:

A: prázdna množina B: $(-2; 1)$ C: $\langle -2; 1\rangle$ D: $(0; \infty)$

5 Riešenie lineárnych rovníc obsahujúcich výrazy s absolútnou hodnotou

5.1 Riešené príklady

---

1. Riešením rovnice $3x - |x-2| = 2x + 2$ v množine reálnych čísel je množina:

   A: $\{2\}$ B: $\langle 2;\infty)$ C: $(-\infty;2)$ D: $(2;\infty)$

Riešenie. V rovnici vystupuje výraz $x-2$ v absolútnej hodnote, ktorý „mení znamienko“ v bode 2. Preto množinu reálnych čísel vyjadríme ako zjednotenie dvoch intervalov, na ktoré ju „bod 2 rozdeľuje“: $\mathbb{R} = (-\infty;2) \cup \langle 2;\infty)$. Danú rovnicu vyriešime zvlášť na jednom a potom na druhom intervale.

1. Pre $x \in (-\infty;2)$ je $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ a daná rovnica má tvar

   $$3x - (-x+2) = 2x + 2.$$

   Ľahko sa presvedčíme, že jej riešením je $x = 2$. Ale $2 \notin (-\infty;2)$, a preto na intervale $(-\infty;2)$ daná rovnica nemá riešenie ($P_1 = \emptyset$).

2. Pre $x \in \langle 2;\infty)$ je $|x-2| = x-2$ a daná rovnica má tvar

   $$3x - (x-2) = 2x + 2.$$

   Po jednoduchej úprave dostaneme $2x+2 = 2x+2$. Táto rovnica je splnená pre každé $x \in \mathbb{R}$, a teda aj pre každé $x \in \langle 2;\infty)$. Preto riešením rovnice na intervale $\langle 2;\infty)$ je celý interval $\langle 2;\infty) = P_2$.

Teda riešením danej rovnice je množina $P = P_1 \cup P_2 = \langle 2;\infty)$, a preto je správna odpoveď B.

---

2. Počet reálnych riešení rovnice $|3x+7| + 3x + 5 = 0$ je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: ∞

Riešenie. Vzhľadom na definíciu absolútnej hodnoty určíme najskôr nulový bod výrazu $V(x) = 3x+7$, ktorý sa nachádza v absolútnej hodnote:

$$x = -\frac{7}{3}.$$

Tento bod rozdelí reálnu os na dva intervaly

$$I_1 = \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right\rangle \qquad \text{a} \qquad I_2 = \left\langle -\frac{7}{3}; \infty\right).$$

Nulový bod $-7/3$ je možné priradiť ľubovoľnému z intervalov I_1 alebo I_2, prípadne aj obidvom, ako sme to zvolili v tomto prípade.

Rovnicu s absolútnou hodnotou prepíšeme na rovnicu bez absolútnej hodnoty na každom intervale rôznym spôsobom, podľa toho, aké je znamienko výrazu $V(x)$ v absolútnej hodnote, vyznačené nad intervalom. Overíme tiež, či prípadné riešenie rovnice patrí danému intervalu.

$V(x)$: $-$ $+$

I_1 $\quad -\dfrac{7}{3} \quad$ I_2

Absolútnu hodnotu v nerovnici „odstránime“, ak nahradíme

$$|V(x)| = \begin{cases} -V(x) & \text{pre } V(x) \leqq 0, \\ V(x) & \text{pre } V(x) \geqq 0. \end{cases}$$

Na I_1 je $3x + 7 \leqq 0$, preto riešime rovnicu

$$\begin{aligned} -(3x+7) + 3x + 5 &= 0, \\ -2 &= 0, \\ P_1 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Na I_2 je $3x + 7 \geqq 0$, preto riešime rovnicu

$$\begin{aligned} (3x+7) + 3x + 5 &= 0, \\ 6x + 12 &= 0, \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Keďže $-2 \in I_2$, dostávame

$$P_2 = \{-2\}.$$

Obor pravdivosti rovnice je

$$P = P_1 \cup P_2 = \emptyset \cup \{-2\} = \{-2\}.$$

Rovnica má jedno reálne riešenie, a preto je správna odpoveď B.

---

3. Nech a je vhodné reálne číslo. Potom obor pravdivosti nerovnice $|2x+1| \geqq 2|x|+1$ na množine reálnych čísel je interval v tvare:

   A: $(-\infty, a)$ B: $(-\infty, a\rangle$ C: $\langle a, \infty)$ D: (a, ∞)

Riešenie. Keďže pre všetky reálne čísla a a b platí

$$|a + b| \leqq |a| + |b|,$$

t. j. absolútna hodnota súčtu nepresahuje súčet absolútnych hodnôt, pre všetky reálne čísla x platí nerovnosť

$$|2x + 1| \leqq 2|x| + 1.$$

Obor pravdivosti nerovnice teda získame, ak vyriešime rovnicu

$$|2x + 1| = 2|x| + 1.$$

Výrazy v absolútnych hodnotách ($V_1(x) = 2x + 1$ a $V_2(x) = x$) sú rovné nule pre

$$x = -\frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad x = 0.$$

Tieto body rozdeľujú číselnú os na tri intervaly, na ktorých postupne riešime úlohu:

$$I_1 = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad I_2 = \left(-\frac{1}{2}; 0\right\rangle \quad \text{a} \quad I_3 = (0; \infty).$$

Uzavretie intervalov v krajných bodoch sme mohli zvoliť aj inak, napríklad $I_1 = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $I_2 = \left\langle -\frac{1}{2}; 0\right\rangle$ a $I_3 = \langle 0; \infty)$. Nad intervalmi sú na obrázku znázornené znamienka výrazov $V_1(x)$ a $V_2(x)$ v ich vnútorných bodoch.

$V_1(x)$:	$-$		$+$		$+$
$V_2(x)$:	$-$		$-$		$+$
	I_1	$-\frac{1}{2}$	I_2	0	I_3

Na každom intervale „odstránime“ všetky absolútne hodnoty na základe znamienok výrazov $V_1(x)$ a $V_2(x)$:

$$\begin{array}{llcccl}
x \in I_1: & -(2x+1) = -2x+1 & \Leftrightarrow & -1 = 1 & \Rightarrow & P_1 = \emptyset, \\
x \in I_2: & 2x+1 = -2x+1 & \Leftrightarrow & x = 0 \in I_2 & \Rightarrow & P_2 = \{0\}, \\
x \in I_3: & 2x+1 = 2x+1 & \Leftrightarrow & 0 = 0 & \Rightarrow & P_3 = \mathbb{R} \cap I_3 = I_3,
\end{array}$$

a teda obor pravdivosti nerovnice je

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 = \{0\} \cup I_3 = \langle 0, \infty).$$

Správna odpoveď je C.

---

4. Obor pravdivosti rovnice $|x+1| + |x-1| = 2|x|$ v obore reálnych čísel je:

   A: interval B: zjednotenie dvoch intervalov C: jednoprvková množina D: dvojprvková množina

---

Riešenie. Výrazy v absolútnych hodnotách:

$$V_1(x) = x + 1, \qquad V_2(x) = x - 1 \quad \text{a} \quad V_3(x) = x$$

sú nulové pre $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Preto budeme úlohu riešiť na štyroch intervaloch, na ktoré tieto nulové body rozdelili číselnú os:

$$I_1 = (-\infty; -1\rangle, \qquad I_2 = (-1; 0\rangle, \qquad I_3 = (0; 1\rangle \quad \text{a} \quad I_4 = (1; \infty).$$

Nad intervalmi sú na obrázku znázornené znamienka výrazov $V_1(x)$, $V_2(x)$ a $V_3(x)$ v ich vnútorných bodoch.

$V_1(x)$:	$-$		$+$		$+$		$+$
$V_2(x)$:	$-$		$-$		$-$		$+$
$V_3(x)$:	$-$		$-$		$+$		$+$
	I_1	-1	I_2	0	I_3	1	I_4

Na každom intervale „odstránime“ všetky absolútne hodnoty na základe znamienok výrazov $V_1(x)$, $V_2(x)$ a $V_3(x)$:

$$\begin{array}{llcll}
x \in I_1: & -(x+1)+[-(x-1)] = -2x & \Leftrightarrow & 0=0 & \Rightarrow\ P_1 = \mathbb{R} \cap I_1 = I_1, \\
x \in I_2: & (x+1)+[-(x-1)] = -2x & \Leftrightarrow & x=-1 \notin I_2 & \Rightarrow\ P_2 = \emptyset, \\
x \in I_3: & (x+1)+[-(x-1)] = 2x & \Leftrightarrow & x=1 \in I_3 & \Rightarrow\ P_3 = \{1\}, \\
x \in I_4: & (x+1)+(x-1) = 2x & \Leftrightarrow & 0=0 & \Rightarrow\ P_4 = \mathbb{R} \cap I_4 = I_4,
\end{array}$$

a teda obor pravdivosti je

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty),$$

čo je zjednotenie dvoch intervalov. Správna je odpoveď B.

---

5. Súčet všetkých reálnych koreňov rovnice $|x+1| + 2|2-x| = 2|x+2|$ je rovný:

A: $\dfrac{19}{3}$ B: $\dfrac{20}{3}$ C: $\dfrac{22}{3}$ D: $\dfrac{25}{3}$

Riešenie. Výrazy

$$V_1(x) = x+1, \qquad V_2(x) = 2-x \quad \text{a} \quad V_3(x) = x+2$$

sú nulové pre $x=-1$, $x=2$ a $x=-2$, preto budeme úlohu riešiť na štyroch intervaloch, na ktoré tieto nulové body delia číselnú os:

$$I_1 = (-\infty; -2\rangle, \qquad I_2 = (-2; -1\rangle, \qquad I_3 = (-1; 2\rangle \quad \text{a} \quad I_4 = (2; \infty).$$

Nad intervalmi na obrázku sú znázornené znamienka výrazov $V_1(x)$, $V_2(x)$ a $V_3(x)$ v ich vnútorných bodoch.

$V_1(x)$:	$-$		$-$		$+$		$+$
$V_2(x)$:	$+$		$+$		$+$		$-$
$V_3(x)$:	$-$		$+$		$+$		$+$
	I_1	-2	I_2	-1	I_3	2	I_4

Na každom intervale „odstránime“ všetky absolútne hodnoty na základe znamienok výrazov $V_1(x)$, $V_2(x)$ a $V_3(x)$:

$$\begin{array}{llcll}
x \in I_1: & -(x+1)+2(2-x) = -2(x+2) & \Leftrightarrow & x=7 \notin I_1 & \Rightarrow\ P_1 = \emptyset, \\
x \in I_2: & -(x+1)+2(2-x) = 2(x+2) & \Leftrightarrow & x=-\dfrac{1}{5} \notin I_2 & \Rightarrow\ P_2 = \emptyset, \\
x \in I_3: & (x+1)+2(2-x) = 2(x+2) & \Leftrightarrow & x=\dfrac{1}{3} \in I_3 & \Rightarrow\ P_3 = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}, \\
x \in I_4: & (x+1)+\big(-2(2-x)\big) = 2(x+2) & \Leftrightarrow & x=7 \in I_4 & \Rightarrow\ P_4 = \{7\},
\end{array}$$

a teda obor pravdivosti je

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = \left\{ \frac{1}{3}; 7 \right\}.$$

Keďže súčet koreňov je $\frac{1}{3} + 7 = \frac{22}{3}$, správna odpoveď je C.

---

6. Súčet všetkých reálnych koreňov rovnice $|2x - 1| = |2 - x|$ je:

   A: 1 B: 2 C: -1 D: 0

Riešenie. Pre rovnosť dvoch absolútnych hodnôt platí:

$$|a| = |b| \qquad \Leftrightarrow \qquad (a = b \quad \vee \quad a = -b)$$

Na základe toho dostávame dve možnosti (stačí položiť $a = 2x - 1$ a $b = 2 - x$):

1. $2x - 1 = 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1;$
2. $2x - 1 = -(2 - x) \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.$

Dostali sme dva korene, ktorých súčet je 0, a preto je správna odpoveď D.

---

7. Súčet všetkých reálnych koreňov rovnice $x^2 - 2x = |x + 4|$ je:

   A: 1 B: 3 C: -1 D: 2

Riešenie. Absolútna hodnota $|x+4|$ má nulový bod $x = -4$, ktorý rozdeľuje množinu reálnych čísel na zjednotenie dvoch intervalov:

$$\mathbb{R} = (-\infty; -4) \cup \langle -4; \infty).$$

1. Pre $x \in (-\infty; -4)$ je výraz $x + 4$ záporný, a preto

   $$|x + 4| = -x - 4.$$

   Potom daná rovnica má tvar

   $$x^2 - 2x = -x - 4,$$

   čo je kvadratická rovnica

   $$x^2 - x + 4 = 0.$$

   Jej diskriminant je $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15$. Je záporný, a preto rovnica nemá na intervale $(-\infty; -4)$ riešenie.

2. Pre $x \in \langle -4; \infty)$ je výraz $x + 4$ nezáporný, a preto
$$|x + 4| = x + 4.$$
Rovnica má teda tvar
$$x^2 - 2x = x + 4,$$
t. j. $x^2 - 3x - 4 = 0$. Ľahko sa presvedčíme, že koreňmi tejto kvadratickej rovnice sú čísla $x = 4$ a $x = -1$. Obe patria do intervalu $\langle -4; \infty)$, a tak sú koreňmi aj našej pôvodnej rovnice s absolútnou hodnotou.

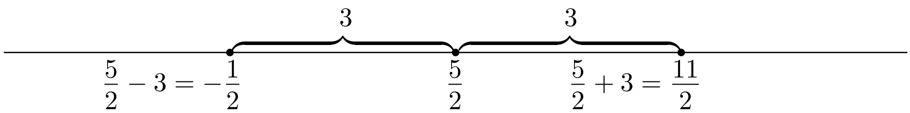
Zistili sme, že daná rovnica má dva korene: $x = 4$ a $x = -1$. Ich súčet je 3, a preto je správna odpoveď B.

---

8. Množina všetkých riešení nerovnice $|5 - 2x| \leqq 6$ je interval:

A: $\left\langle -\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right\rangle$ B: $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$ C: $\left\langle 0; \frac{11}{2} \right\rangle$ D: $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{11}{2} \right\rangle$

Riešenie. Je viac možných postupov na vyriešenie tejto nerovnice. My využijeme ten fakt, že ak je a konkrétne reálne číslo, tak $|x - a|$ vyjadruje vzdialenosť bodu x na číselnej osi od bodu (čísla) a. Využijúc vlastnosti absolútnej hodnoty upravíme výraz $|5 - 2x|$ na tvar $|x - a|$. Keďže
$$|5 - 2x| = \left| -2 \cdot \left(x - \frac{5}{2} \right) \right| = |-2| \cdot \left| x - \frac{5}{2} \right| = 2 \cdot \left| x - \frac{5}{2} \right|,$$
tak danú nerovnicu môžeme zapísať v ekvivalentnom tvare
$$2 \cdot \left| x - \frac{5}{2} \right| \leqq 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left| x - \frac{5}{2} \right| \leqq 3.$$
Riešením poslednej nerovnice je množina všetkých tých bodov x, ktoré na číselnej osi majú od bodu $\frac{5}{2}$ vzdialenosť menšiu alebo rovnú ako 3. Na nasledujúcom obrázku túto množinu ľahko zistíme:



Riešením nerovnice je interval $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{11}{2} \right\rangle$. Správna odpoveď je D.

5.2 Úlohy

---

1. Počet riešení rovnice $|3x + 7| = 5x + 11$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: ∞

2. Počet riešení rovnice $|6 - 3x| = 2x - 5$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: ∞

---

3. Počet riešení rovnice $|2x + 6| + 2x + 6 = 0$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: ∞

---

4. Počet riešení rovnice $|3x - 2| = 1 - 3x$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: ∞

---

5. Počet riešení rovnice $|2x - 7| = x - 2$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: ∞

---

6. Počet riešení rovnice $|3x + 12| = 3x + 6$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: ∞

---

7. Rovnica $|3 - 2x| = 2x - 3$ má:

A: aspoň jedno záporné riešenie B: aspoň jedno kladné riešenie C: práve dve riešenia D: najviac jedno riešenie

---

8. Rovnica $|3x + 2| = 3x - 2$ má:

A: aspoň jedno záporné riešenie B: aspoň jedno kladné riešenie C: práve dve riešenia D: najviac jedno riešenie

---

9. Rovnica $|3x + 4| = 3x + 8$ má:

A: nula riešení B: aspoň jedno záporné riešenie C: aspoň jedno kladné riešenie D: práve dve riešenia

---

10. Súčet koreňov rovnice $|5x - 6| = 3x - 2$ je:

A: -3 B: 0 C: 3 D: 6

---

11. Súčin koreňov rovnice $|4x + 5| = 3x + 9$ je:

A: -8 B: -2 C: 0 D: 14

---

12. Koreň rovnice $|3x + 6| + 2x + 4 = 0$ leží v intervale:

A: $(-9; -6)$ B: $(-6; -3)$ C: $(-3; 0)$ D: $(0; 3)$

13. Koreň rovnice $|3x+6| = 5x+10$ je deliteľný číslom:

A: 2 B: 3 C: 5 D: 7

14. Súčin všetkých reálnych koreňov rovnice $|3x+1| = 2|x+1|$ je:

A: 1 B: $-\frac{3}{5}$ C: $\frac{2}{5}$ D: 0

15. Súčet druhých mocnín všetkých reálnych koreňov rovnice $|3x+1| = 3|x+1|$ je:

A: 9 B: $\frac{1}{9}$ C: $\frac{4}{9}$ D: 10

16. Všetky reálne korene rovnice $|1-x| - 3 = 2x$ tvoria množinu:

A: $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ B: $\left\{-4; -\frac{2}{3}\right\}$ C: $\{-4\}$ D: $\left\langle -4; -\frac{2}{3}\right\rangle$

17. Všetky reálne korene rovnice $2 - 3x = |x+2|$ tvoria množinu:

A: $\{0; 2\}$ B: $\{2\}$ C: $\langle 0; 2\rangle$ D: $\{0\}$

18. Všetky reálne korene rovnice $\sqrt{x^2} - 3x - 8 = 0$ tvoria množinu:

A: $\{-4; -2\}$ B: $\{-4; 1\}$ C: $\{-2; 2\}$ D: $\{-2\}$

19. Súčin všetkých reálnych koreňov rovnice $|x-4| - x^2 = 2x - 6$ je:

A: 10 B: 2 C: -4 D: -10

20. Všetky reálne korene rovnice $|x-5| + 7 = x^2$ sú z intervalu:

A: $(-4; 4\rangle$ B: $(-3; 3\rangle$ C: $\langle -4; 4)$ D: $\langle -4; 3)$

21. Množina riešení nerovnice $|3x+2| < 4$ je interval:

A: $\left(-2; \frac{2}{3}\right\rangle$ B: $\langle 0; 4\rangle$ C: $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$ D: $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$

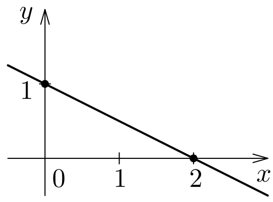
22. Množina riešení nerovnice $|2-x| \geqq 7$ je:

A: $(-\infty; -5\rangle \cup \langle 9; \infty)$ B: $\langle 9; \infty)$ C: $(-\infty; -5\rangle$ D: $(-5; 9)$

6 Funkcie (základné vlastnosti, graf)

6.1 Riešené príklady

1. Na obrázku je znázornená priamka,



ktorá je grafom funkcie $y = f(x)$ danej vzťahom:

A: $y = 2 - 2x$ B: $y = 1 - \dfrac{x}{2}$ C: $y = 1 + 2x$ D: $y = 1 - 2x$

Riešenie. Všetky funkcie vo výsledkoch sú lineárne, preto ich grafmi sú priamky. Stačí teda overiť, či dva body priamky znázornenej na obrázku vyhovujú odpovedajúcej rovnici. Z grafu vidno, že priamka prechádza bodmi $[2; 0]$ a $[0; 1]$. Bod priamky, pre ktorý je $x = 2$ a $y = 0$, nevyhovuje rovniciam A, C, D, pretože

$$0 \neq 2 - 2 \cdot 2 = -2, \qquad 0 \neq 1 + 2 \cdot 2 = 5, \qquad 0 \neq 1 - 2 \cdot 2 = -3$$

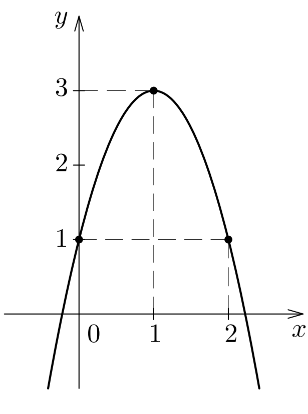
a vyhovuje rovnici B, ktorej vyhovuje aj bod $[0; 1]$:

$$2 = 2 - 2 \cdot 0 \qquad \text{a} \qquad 0 = 2 - 2 \cdot 1.$$

Preto je správna odpoveď B.

---

2. Rovnica paraboly znázornenej na obrázku



je:

A: $y = 1 + 2x$ B: $y = -2x^2 + 4x + 1$ C: $y = 2x^2 + 1$ D: $y = 3 - 2(x-1)^4$

Riešenie. Parabola je grafom kvadratickej funkcie, preto prípady A a D sú nesprávne. Rovnica A neobsahuje kvadratický člen (je to predpis lineárnej funkcie) a rovnica D obsahuje člen x^4, a teda sa jedná o polynóm štvrtého rádu, čo nie je kvadratická funkcia. Vzhľadom na to, že vrchol paraboly je maximum, je koeficient pri x^2 záporný, teda nevyhovuje odpoveď C. Ľahko sa dá overiť, že tri body $[0;1]$, $[1;3]$ a $[2;1]$, zvýraznené na grafe, vyhovujú rovnici $y = -2x^2 + 4x + 1$, a teda správna je odpoveď B.

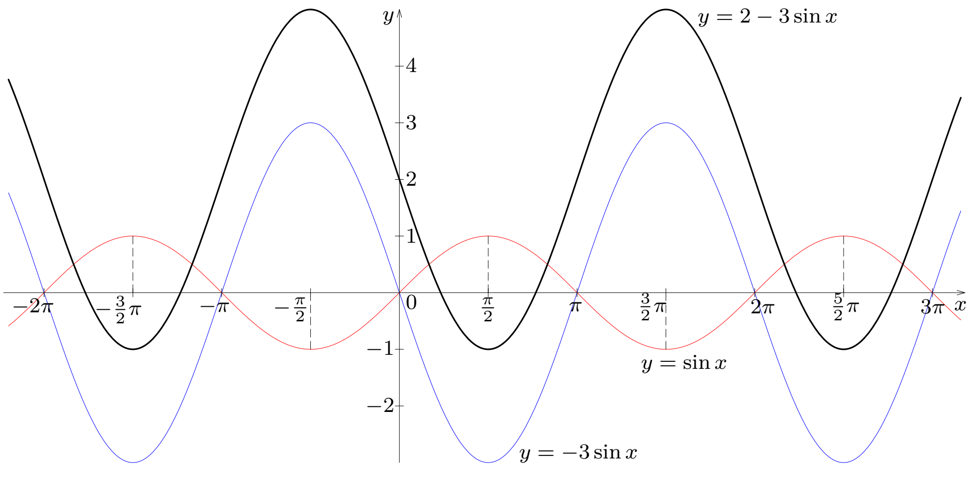
---

3. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = 2 - 3\sin x$ je pravdivé:

A: funkcia je zdola ohraničená B: funkcia je zhora neohraničená C: funkcia je prostá D: funkcia je neklesajúca

---

Riešenie. Najprv načrtneme graf danej funkcie. Postupne načrtneme graf funkcie $y = \sin x$, ďalej jeho „preklopením okolo osi x“ (t. j. použitím osovej súmernosti podľa osi x) získame graf funkcie $y = -\sin x$ a jeho trojnásobným zväčšením v smere osi y, odpovedajúcim koeficientu 3, dostaneme graf funkcie $y = -3\sin x$. Nakoniec posunutím nahor o 2 jednotky získame graf funkcie $y = 2 - 3\sin x$. Z náčrtu jednoducho určíme požadované vlastnosti.



Funkcia $y = \sin x$ je periodická a ohraničená (čo si môžeme všimnúť aj na grafe), a preto je periodická a ohraničená aj funkcia $y = 2 - 3\sin x$. Keďže funkcia je zdola ohraničená (pretože je ohraničená), správna odpoveď je A.

Z vyššie uvedeného tiež vyplýva, že odpoveď B nie je správna. Funkcia nie je prostá ani neklesajúca (lebo je periodická a spojitá), preto odpovede C a D sú nesprávne.

---

4. Funkcia $f\colon\ y = 6 - x - x^2$ nadobúda kladné hodnoty práve na množine:

A: $(-3; -2)$ B: $(2; 3)$ C: $(-3; 2)$ D: $(-2; 3)$

Riešenie. Daná funkcia nadobúda kladné hodnoty práve vtedy, keď

$$6 - x - x^2 > 0.$$

Túto nerovnicu môžeme vyriešiť napríklad intervalovou metódou, ktorú nazývame aj metódou nulových bodov. Koreňmi zodpovedajúcej rovnice

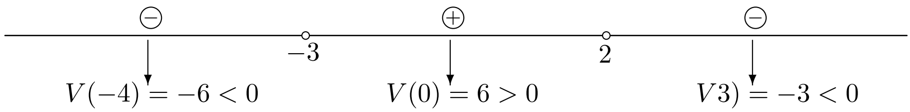
$$6 - x - x^2 = 0$$

sú čísla 2 a -3, ktoré rozdeľujú číselnú os na tri intervaly (pozri obrázok):

$$I_1 = (-\infty; -3), \qquad I_2 = (-3; 2) \quad \text{a} \quad I_3 = (2; \infty).$$

Čísla 2 a -3 vyznačíme na obrázku prázdnym krúžkom, pretože nie sú riešeniami danej nerovnice s ostrou nerovnosťou.

riešená nerovnica $V(x) = 6 - x - x^2 = -(x-2)(x+3) > 0$



Na ľubovoľnom z týchto intervalov je výraz $V(x)$ buď kladný alebo záporný. O tom, ktorá situácia nastáva, rozhodneme vyčíslením jeho hodnoty vo vhodne zvolených bodoch jednotlivých intervalov. Pre interval $I_1 = (-\infty; -3)$ zvolíme napríklad číslo -4: potom

$$V(-4) = 6 + 4 - (-4)^2 = -6.$$

Číslo -6 je záporné, a preto označíme interval I_1 znakom $\ominus$, t. j. výraz $V(x)$ je na ňom len záporný. Podobným spôsobom určíme znamienko výrazu $V(x)$ na intervaloch I_2 a I_3. Výsledky sú znázornené na obrázku.

Riešením danej nerovnice je množina všetkých $x \in \mathbb{R}$, v ktorých výraz $V(x)$ nadobúda kladné hodnoty. Táto množina je určená zjednotením všetkých intervalov, ktoré sme na obrázku označili znakom $\oplus$. To znamená, že funkcia nadobúda kladné hodnoty práve na intervale $I_2 = (-3; 2)$. Správna odpoveď je C.

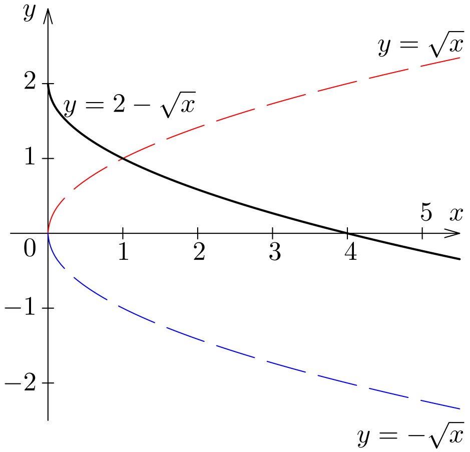
---

5. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = 2 - \sqrt{x}$ je pravdivé:

A: funkcia je ohraničená B: funkcia je periodická C: funkcia je prostá D: funkcia je rastúca

---

Riešenie. Na určenie správnej odpovede využijeme graf funkcie. Najprv načrtneme graf funkcie $y = \sqrt{x}$, ďalej s využitím osovej súmernosti podľa osi x získame graf funkcie $y = -\sqrt{x}$ a nakoniec jeho posunutím o dve jednotky nahor získame graf funkcie $y = 2 - \sqrt{x}$ (viď obrázok). Z náčrtu jednoducho určíme požadované vlastnosti.



Funkcia $y = \sqrt{x}$ je zhora neohraničená, a preto je funkcia $y = 2 - \sqrt{x}$ neohraničená zdola, a teda neohraničená. Funkcia teda nevyhovuje tvrdeniu A.

Z grafu vidíme, že funkcia je klesajúca, a teda nie je ani periodická (vlastnosť B) ani rastúca (vlastnosť D), ale je prostá. Správna odpoveď je C.

---

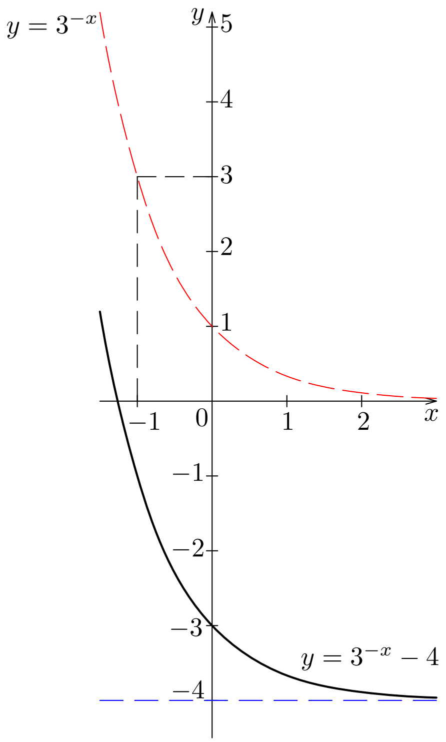
6. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = 3^{-x} - 4$ je nepravdivé:

   A: funkcia je zdola ohraničená B: funkcia je zhora neohraničená C: funkcia je prostá D: funkcia je periodická

Riešenie. Aj v tomto prípade načrtneme graf funkcie (najprv načrtneme graf funkcie $y = 3^{-x}$ a potom ho posunieme v smere osi y o 4 jednotky nadol) a z náčrtu jednoducho rozhodneme, ktoré vlastnosti platia a ktoré nie. Platí:

$$3^{-x} = \left(3^{-1}\right)^{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}.$$

Funkcia $y = 3^{-x}$ je teda exponenciálna funkcia so základom $\frac{1}{3}$, ktorý je z intervalu $(0; 1)$. Jedná sa teda o klesajúcu funkciu.



Môžeme konštatovať, že funkcia je zdola ohraničená, napríklad hodnotou -4, nie je zhora ohraničená a ako klesajúca nemôže byť periodická, ale musí byť prostá. Teda nepravdivé je tvrdenie D.

---

7. Oborom hodnôt funkcie danej predpisom $f: \; y = x^2 + 4x + 7, \; x \in (-\infty; \infty)$ je množina:

   A: $\langle 7; \infty)$ B: $\langle 3; \infty)$ C: $\langle 4; \infty)$ D: $\langle 0; \infty)$

Riešenie. Uvedieme jeden z možných postupov vyriešenia tejto úlohy. Najprv doplníme výraz $x^2 + 4x + 7$ na úplný štvorec:

$$x^2 + 4x + 7 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 7 = (x + 2)^2 + 3.$$

Zrejme pre každé $x \in (-\infty; \infty)$ je

$$0 \leqq (x + 2)^2 < \infty.$$

Ak ku každej strane týchto nerovníc pripočítame číslo 3, dostaneme

$$3 \leqq (x + 2)^2 + 3 < \infty,$$

t. j. $(x + 2)^2 + 3 \in \langle 3; \infty)$. Správna je odpoveď B.

8. Grafom funkcie danej predpisom $f\colon\ y = (\sqrt{x})^2$ je:

A: úsečka B: priamka C: parabola D: polpriamka

Riešenie. V predpise funkcie f vystupuje výraz $\sqrt{x}$, ktorý je definovaný len pre $x \geqq 0$. Druhá mocnina je definovaná pre každé reálne číslo, a preto definičným oborom funkcie f je interval $\langle 0; \infty)$. Je zrejmé, že pre $x \in \langle 0; \infty)$ je $(\sqrt{x})^2 = x$. Z uvedených úvah vyplýva, že predpis funkcie f môžeme ekvivalentne zapísať v tvare

$$f\colon\ y = x, \quad x \in \langle 0; \infty).$$

Grafom funkcie $y = x$, $x \in \mathbb{R}$, je priamka, ale pre funkciu f je $x \in \langle 0; \infty)$. To znamená, že jej grafom je polpriamka (skúste ju načrtnúť), a preto správna odpoveď je D.

9. Jeden z priesečníkov grafov funkcií $f\colon\ y = \dfrac{3}{x}$ a $g\colon\ y = x–2$ je bod so súradnicami:

A: $[3; -1]$ B: $[3; 1]$ C: $[-3; 1]$ D: $[1; 3]$

Riešenie. Pre x-ovú súradnicu priesečníka grafov funkcií f a g platí

$$\frac{3}{x} = x - 2, \qquad x \neq 0.$$

Ak vynásobíme obe strany tejto rovnice výrazom x, dostaneme

$$3 = x^2 - 2x, \qquad \text{t. j.} \qquad 0 = x^2 - 2x - 3.$$

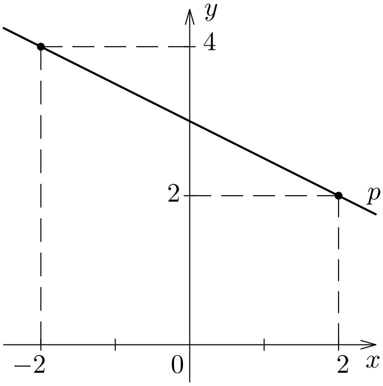
To je kvadratická rovnica s diskriminantom $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$. Jej korene sú $x_1 = 3$ a $x_2 = -1$ (hodnota $x_2 = -1$ nevyhovuje žiadnej z ponúknutých možností). Hodnota funkcie f v bode $x_1 = 3$ je $y_1 = f(3) = \dfrac{3}{3} = 1$, a teda bod so súradnicami $[3; 1]$ je jeden z hľadaných priesečníkov, a preto je správna odpoveď B.

Túto úlohu sme mohli riešiť aj postupným overovaním toho, či ponúkané súradnice môžu byť súradnicami priesečníka grafov daných funkcií – napríklad odpoveď A nie je správna, lebo $[3; -1]$ nie je bodom grafu funkcie f, pretože $-1 \neq f(3)$.

6.2 Úlohy

---

1. Priamka p, znázornená na obrázku,

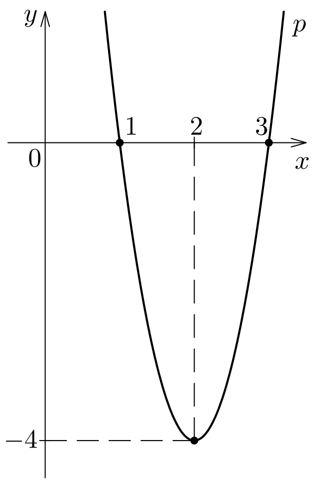


je grafom funkcie $y = f(x)$, ktorá je daná predpisom:

A: $y = -x + 4$ B: $y = 3 - x$ C: $y = 0{,}5 \cdot (6 - x)$ D: $y = 3 - \dfrac{x^2}{4}$

---

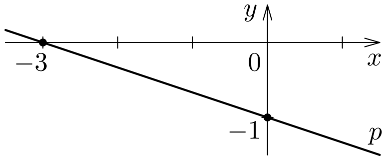
2. Parabola p, znázornená na obrázku,



je grafom funkcie $y = f(x)$, ktorá je daná predpisom:

A: $y = (x-1)(x-3)$ B: $y = (x+1)(x+3)$ C: $y = -4(x-1)^2(x-3)^2$
D: $y = 4x^2 - 16x + 12$

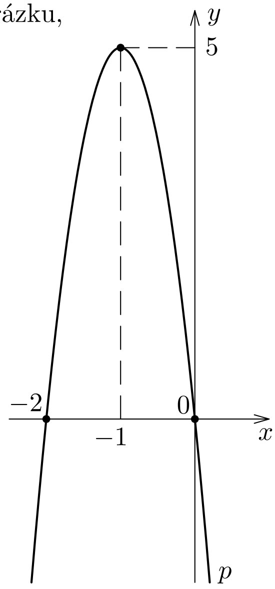
3. Priamka p, znázornená na obrázku,



je grafom funkcie $y = f(x)$, ktorá je daná predpisom:

A: $y = 2(x+3) - 1$ B: $y = (x+3)^2 - 10$ C: $y = -\dfrac{(x+3)^2}{9}$ D: $y = -1 - \dfrac{x}{3}$

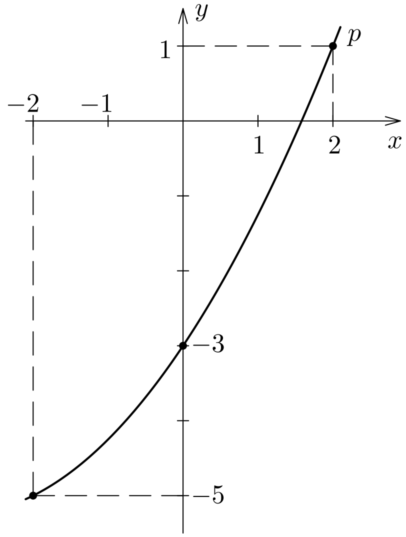
4. Parabola p, znázornená na obrázku,



je grafom funkcie $y = f(x)$, ktorá je daná predpisom:

A: $y = x(x+2)$ B: $y = x(x+2) + 5$ C: $y = -5(2x + x^2)$ D: $y = 5x^2(x+2)$

5. Časť paraboly p, znázornená na obrázku,



je časťou grafu funkcie $y = f(x)$, ktorá je daná predpisom:

A: $y = \dfrac{6x}{4} - 2$ B: $y = \dfrac{x^4}{4} - 3$ C: $y = \dfrac{x^2 + 6x - 12}{4}$ D: $y = \dfrac{x^2 + 6x - 3}{4}$

6. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = 3 - \cos(x + 2)$ je nepravdivé:

A: je rastúca B: je zhora ohraničená C: je zdola ohraničená D: je periodická

7. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = 3^x - 2$ je pravdivé:

A: je ohraničená B: je zdola neohraničená C: je neklesajúca D: je periodická

8. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = 3 - x^3$ je pravdivé:

A: je ohraničená B: je rastúca C: je prostá D: je periodická

9. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = (x + 2)^2$ je pravdivé:

A: je neohraničená zdola B: je neohraničená zhora C: je prostá D: je nerastúca

10. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = 5 - 2^{-x}$ je nepravdivé:

A: je ohraničená zdola B: je ohraničená zhora C: je rastúca D: je neklesajúca

11. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = 2 \cdot \sqrt{x} - 5$ je pravdivé:

A: je ohraničená zdola B: je ohraničená zhora C: je nerastúca D: je periodická

---

12. Funkcia $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ nadobúda kladné hodnoty práve na množine:

A: $(-2; 0) \cup (2; \infty)$ B: $(0; \infty)$ C: $(0; 2)$ D: $(-2; 0)$

---

13. Funkcia $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ nadobúda nezáporné hodnoty na množine:

A: $\langle 0; \infty)$ B: $\langle 0; 2) \cup (2; \infty)$ C: $(-2; 0\rangle \cup (2; \infty)$ D: $(2; \infty)$

---

14. Oborom hodnôt funkcie $y = 7 - 3x$, $x \in (-2; 1\rangle$ je množina:

A: $(-2; 1\rangle$ B: $\langle -3; 6)$ C: $(5; 8\rangle$ D: $\langle 4; 13)$

---

15. Oborom hodnôt funkcie $y = 6 + 3 \sin x$ je množina:

A: $\langle 3; 6\rangle$ B: $\langle 0; 3\rangle$ C: $\langle 3; 9\rangle$ D: $\langle 0; 6\rangle$

---

16. Oborom hodnôt funkcie $y = 3 - 2^x$, $x \in \langle 0; 3)$ je množina:

A: $(-5; 2\rangle$ B: $\langle 0; 8\rangle$ C: $(-8; 3\rangle$ D: $(-5; 2)$

---

17. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = x^2 + 3$ je pravdivé:

A: je rastúca B: je periodická C: číslo 2 je z jej oboru hodnôt D: nie je prostá

---

18. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii $y = \dfrac{4}{x}$ je pravdivé:

A: je neklesajúca B: je periodická C: je prostá D: je ohraničená

---

19. Grafom funkcie $f\colon\ y = 3x - 1,\ x \in \langle 2; 8\rangle$ je:

A: úsečka B: priamka C: polpriamka D: izolovaný bod

---

20. Grafy funkcií $f\colon\ y = 3x - 1$ a $g\colon\ y = -2x + 14$ sa pretínajú v bode:

A: $[3; 8]$ B: $[3; -2]$ C: $[-1; 14]$ D: $[0; -1]$

---

21. Priesečník grafov funkcií $f:\ y = x^2 - 1$ a $g:\ y = 2x - 1$, ktorý leží v prvom kvadrante, má y-ovú súradnicu rovnú:

A: 1 B: 2 C: 3 D: 4

7 Funkcie (základné vlastnosti, definičný obor a obor funkčných hodnôt)

7.1 Riešené príklady

1. Ak $f(x) = 8x^2 + \dfrac{2}{x} + 5$, tak hodnota $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ je:

   A: -1 B: $\dfrac{27}{4}$ C: 3 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Do predpisu funkcie $f(x) = 8x^2 + \dfrac{2}{x} + 5$ dosadíme za premennú x číslo $-\dfrac{1}{2}\cdot$ Dostaneme:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{-\frac{1}{2}} + 5 = 8\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot(-2) + 5 = 2 - 4 + 5 = 3.$$

Správna odpoveď je C.

2. Definičným oborom funkcie $f : y = \sqrt{5x-3}$ je:

   A: $\left(-\infty; \dfrac{3}{5}\right\rangle$ B: $\left(\dfrac{3}{5}; \infty\right)$ C: $\left\langle\dfrac{3}{5}; \infty\right)$ D: $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$

Riešenie. Párna odmocnina existuje len z nezáporných čísel, a preto výraz $5x-3$ musí byť nezáporný, t. j.

$$5x - 3 \geqq 0.$$

Teda

$$5x \geqq 3,$$
$$x \geqq \frac{3}{5}\cdot$$

Z toho vyplýva, že definičný obor funkcie f je

$$D_f = \left\langle\frac{3}{5}; \infty\right).$$

Správna odpoveď je C.

3. Definičným oborom funkcie $f : y = \sqrt{2-3x}$ je:

A: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right\rangle$ B: $\left\langle\frac{2}{3}; \infty\right)$ C: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ D: $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

Riešenie. Výraz $\sqrt{2-3x}$ je definovaný, ak

$$2 - 3x \geqq 0,$$

lebo druhá odmocnina existuje len z nezáporných čísel. Potom

$$-3x \geqq -2,$$
$$x \leqq \frac{2}{3}.$$

Preto definičný obor danej funkcie f je

$$D_f = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right\rangle.$$

Správna odpoveď je A.

4. Definičným oborom funkcie $f : y = \dfrac{2x+15}{\sqrt{8x+13}}$ je:

A: $\mathbb{R} - \left\{-\frac{13}{8}\right\}$ B: $\left\langle-\frac{13}{8}; \infty\right)$ C: $\left(-\frac{13}{8}; \infty\right)$ D: $\left(-\infty; -\frac{13}{8}\right)$

Riešenie. Definičný obor funkcie určíme z podmienok, že pod párnou odmocninou musí byť výraz nezáporný a menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule, t. j.

$$8x + 13 \geqq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{8x+13} \neq 0.$$

Tieto dve podmienky sú splnené, ak platí nerovnica

$$8x + 13 > 0,$$

ktorú vyriešime ekvivalentnými úpravami

$$8x > -13,$$
$$x > -\frac{13}{8}.$$

To znamená, že definičným oborom funkcie f je

$$D_f = \left(-\frac{13}{8}; \infty\right).$$

Správna odpoveď je C.

5. Definičným oborom funkcie $f: y = \log(3-2x) - \dfrac{x^2-6}{x+1}$ je:

A: $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right\rangle$ B: $(-\infty; -1) \cup \left(-1; \dfrac{3}{2}\right)$ C: $\left(\dfrac{3}{2}; \infty\right)$ D: $(-\infty; -1) \cup \left(-1; \dfrac{3}{2}\right\rangle$

Riešenie. Definičný obor danej funkcie určíme z podmienok, že logaritmus je definovaný len pre kladné čísla, t. j. $3 - 2x > 0$ a menovateľ zlomku má byť rôzny od nuly, t. j. $x + 1 \neq 0$. Teda musia byť splnené tieto dve podmienky:

$$3 - 2x > 0 \quad \wedge \quad x + 1 \neq 0.$$

Odtiaľ dostaneme

$$\begin{aligned} -2x &> -3 \quad \wedge \quad x \neq -1, \\ x &< \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x \neq -1. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že definičný obor funkcie f je

$$D_f = (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{3}{2}\right).$$

Správna je odpoveď B.

6. Definičným oborom funkcie $f: y = \log \dfrac{x+2}{3-x}$ je:

A: $(-\infty; -2\rangle$ B: $(-2; 3)$ C: $\langle -2; \infty)$ D: $(-\infty; -2\rangle \cup (3; \infty)$

Riešenie. V predpise funkcie vystupuje zlomok a logaritmus. Menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule, t. j.

$$3 - x \neq 0,$$

teda $x \neq 3$.

Logaritmus je definovaný len pre kladný výraz, a preto musí byť splnená nerovnica

$$\frac{x+2}{3-x} > 0.$$

Túto nerovnicu môžeme riešiť metódou nulových bodov. Čitateľ zlomku v nerovnici je rovný nule pre $x = -2$, menovateľ nadobúda nulovú hodnotu pre $x = 3$. Tieto dva body rozdelia množinu reálnych čísel na tri intervaly:

$$(-\infty; -2), \quad (-2; 3) \quad \text{a} \quad (3; \infty).$$

Dosadením ľubovoľných čísel z vnútra jendnotlivých intervalov zistíme, v ktorých intervaloch výraz $V(x) = \dfrac{x+2}{3-x}$ nadobúda kladné a v ktorých záporné hodnoty.

$$(-\infty; -2): \quad x = -3 \qquad \Rightarrow \qquad V(-3) = \frac{-3+2}{3-(-3)} = \frac{-1}{6} < 0,$$

$$(-2; 3): \qquad x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V(0) = \frac{0+2}{3-0} = \frac{2}{3} > 0,$$

$$(3; \infty): \qquad x = 4 \qquad \Rightarrow \qquad V(4) = \frac{4+2}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6 < 0.$$

Výsledky môžeme zapísať do tabuľky, v ktorej vidno, že $V(-2) = 0$ a $V(3)$ neexistuje, čo sme zaznamenali symbolom $*$.

x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$(-2;\ 3)$	3	$(3;\ \infty)$
$V(x)$	$-$	0	$+$	$*$	$-$

V rámci určenia definičného oboru funkcie f sme museli nájsť množinu tých x, pre ktoré je výraz $V(x)$ kladný. Z tabuľky je teda zrejmé, že definičný obor funkcie f je

$$D_f = (-2;\ 3)\,.$$

Správna je odpoveď B.

---

7. Definičným oborom funkcie $f : y = \sqrt[4]{(x-8)(5-x)}$ je:

A: $(-\infty;\ 8\rangle$ B: $(-\infty;\ 5) \cup (5;\ 8)$ C: $\langle 8; \infty)$ D: $\langle 5;\ 8\rangle$

Riešenie. Definičný obor funkcie určíme z podmienky, že pod párnou odmocninou musí byť výraz nezáporný, t. j.

$$(x-8)(5-x) \geqq 0.$$

Nerovnicu vyriešime intervalovou metódou. Výraz

$$V(x) = (x-8)(5-x)$$

je rovný nule pre $x = 8$ alebo pre $x = 5$. Tieto dva body rozdelia množinu reálnych čísel na tri intervaly:

$$(-\infty;\ 5), \quad (5;\ 8) \quad \text{a} \quad (8;\ \infty).$$

Vyčíslením hodnoty výrazu $V(x)$ v ľubovoľných bodoch jednotlivých intervalov zistíme, kde daný výraz nadobúda kladné a kde záporné hodnoty.

$$(-\infty; 5): \quad x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V(0) = (0-8)(5-0) = -40 < 0,$$

$$(5; 8): \qquad x = 6 \qquad \Rightarrow \qquad V(6) = (6-8)(5-6) = 2 > 0,$$

$$(8; \infty): \qquad x = 9 \qquad \Rightarrow \qquad V(9) = (9-8)(5-9) = -4 < 0.$$

Zistené poznatky sú zapísané v tabuľke, v ktorej je zrejmé, že $V(5) = 0$ a $V(8) = 0$:

x	$(-\infty; 5)$	5	$(5; 8)$	8	$(8; \infty)$
$V(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Z tabuľky je zrejmé, že výraz $V(x)$ je nezáporný na množine

$$\{5\} \cup (5; 8) \cup \{8\} = \langle 5; 8 \rangle,$$

čo je zároveň definičný obor funkcie f. Správna odpoveď je D.

---

8. Definičným oborom funkcie $f : y = \sqrt{\dfrac{4x+3}{7x-1}}$ je:

A: $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right\rangle$ B: $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right\rangle \cup \left\langle \dfrac{1}{7}; \infty\right)$ C: $\left\langle -\dfrac{3}{4}; \infty\right)$ D: $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right\rangle \cup \left(\dfrac{1}{7}; \infty\right)$

Riešenie. Definičný obor funkcie určíme z podmienok, že menovateľ zlomku nesmie byť rovný nule, t. j.

$$7x - 1 \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \neq \frac{1}{7}$$

a pod druhou odmocninou môže byť len nezáporný výraz

$$\frac{4x+3}{7x-1} \geqq 0.$$

Túto nerovnicu môžeme riešiť metódou nulových bodov. Čitateľ výrazu

$$V(x) = \frac{4x+3}{7x-1}$$

je rovný nule pre $x = -\frac{3}{4}$, menovateľ nadobúda nulovú hodnotu pre $x = \frac{1}{7}$· Tieto dva body rozdelia množinu reálnych čísel na tri intervaly:

$$\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right), \quad \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{7}\right) \quad \text{a} \quad \left(\frac{1}{7}; \infty\right).$$

Na každom z týchto intervalov výraz $V(x)$ nemení znamienko. Z každého intervalu stačí zvoliť jeden bod a vyčísliť v ňom hodnotu výrazu $V(x)$, ktorá môže byť len kladná alebo záporná.

$$\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right): \quad x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad V(-1) = \frac{4\cdot(-1)+3}{7\cdot(-1)-1} = \frac{-4+3}{-7-1} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8} > 0,$$

$$\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{7}\right): \quad x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V(0) = \frac{4\cdot 0+3}{7\cdot 0-1} = -3 < 0,$$

$$\left(\frac{1}{7}; \infty\right): \quad x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad V(1) = \frac{4\cdot 1+3}{7\cdot 1-1} = \frac{7}{6} > 0.$$

Výsledky môžeme zapísať do tabuľky, kde $V\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$ a $V\left(\frac{1}{7}\right)$ neexistuje:

x	$\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$	$-\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{7}\right)$	$\frac{1}{7}$	$\left(\frac{1}{7}; \infty\right)$
$V(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$+$

Úlohu nájsť definičný obor funkcie f sme preformulovali na úlohu zistiť, kedy je výraz $V(x)$ kladný. Z tabuľky je zrejmé, že definičný obor funkcie f je

$$D_f = \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right\rangle \cup \left(\frac{1}{7}; \infty\right).$$

Správna odpoveď je D.

7.2 Úlohy

---

1. Ak $f(x) = \dfrac{2{,}01 - x^2}{x}$, tak hodnota $f\left(-\frac{1}{10}\right)$ je:

   A: $-20{,}2$ B: -20 C: $-0{,}2$ D: $20{,}2$

---

2. Ak $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^3} - 8$, tak hodnota $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ je:

   A: $-\dfrac{47}{4}$ B: $-\dfrac{61}{8}$ C: $-\dfrac{1}{4}$ D: $\dfrac{1}{4}$

---

3. Ak $f(x) = 16x^2 - \dfrac{1}{x} - 3$, tak hodnota $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ je:

   A: $-\dfrac{3}{2}$ B: $-\dfrac{9}{4}$ C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

4. Ak $f(x) = \dfrac{4 - 2x}{x^2}$, tak hodnota $f(-0{,}2)$ je:

   A: -90 B: 11 C: 90 D: 110

---

5. Ak $f(x) = 1 - x - 2x^2 - 3x^3$, tak hodnota $f(-1)$ je:

   A: -5 B: -3 C: 3 D: 7

---

6. Definičným oborom funkcie $f: y = \dfrac{4 + 5x}{\sqrt{3x - 7}}$ je:

   A: $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$ B: $\left\langle \frac{7}{3}; \infty\right)$ C: $\left(\frac{7}{3}; \infty\right)$ D: $\mathbb{R} - \left\{\frac{7}{3}\right\}$

7. Definičným oborom funkcie $f: y = \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{6x + 14}}$ je:

A: $\left\langle -\dfrac{7}{3}; \infty \right)$ B: $\left(-\dfrac{7}{3}; \infty \right)$ C: $\mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{7}{3} \right\}$ D: $\left(\dfrac{7}{3}; \infty \right)$

---

8. Definičným oborom funkcie $f: y = \dfrac{8x - 7}{\sqrt{1 - 3x}}$ je:

A: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3} \right)$ B: $\left(-\infty; \dfrac{1}{3} \right)$ C: $\left(-\infty; \dfrac{1}{3} \right\rangle$ D: $\left(\dfrac{1}{3}; \infty \right)$

---

9. Definičným oborom funkcie $f: y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{3 - 5x}}$ je:

A: $\left(-\infty; \dfrac{3}{5} \right)$ B: $\left(-\infty; \dfrac{3}{5} \right\rangle$ C: $\left(-\dfrac{3}{5}; \infty \right)$ D: $\left(\dfrac{3}{5}; \infty \right)$

---

10. Definičným oborom funkcie $f: y = \dfrac{x + 4}{\sqrt{5 - 2x}}$ je:

A: $\left(-\infty; \dfrac{5}{2} \right)$ B: $\left(-\infty; \dfrac{5}{2} \right\rangle$ C: $\left(\dfrac{5}{2}; \infty \right)$ D: $\left\langle \dfrac{5}{2}; \infty \right)$

---

11. Definičným oborom funkcie $f: y = \sqrt{(2x - 5)(x + 3)}$ je:

A: $(-\infty; -3) \cup \left(\dfrac{5}{2}; \infty \right)$ B: $(-\infty; -3\rangle \cup \left\langle \dfrac{5}{2}; \infty \right)$ C: $\left\langle \dfrac{5}{2}; \infty \right)$ D: $\left(\dfrac{5}{2}; \infty \right)$

---

12. Definičným oborom funkcie $f: y = \sqrt{(2x + 1)(x - 2)}$ je:

A: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2} \right) \cup (2; \infty)$ B: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 2; \infty)$ C: $\left\langle -\dfrac{1}{2}; \infty \right)$ D: $\left(-\dfrac{1}{2}; \infty \right)$

---

13. Definičným oborom funkcie $f: y = \sqrt{\dfrac{3x + 4}{1 + x}}$ je:

A: $\left(-\infty; -\dfrac{4}{3} \right\rangle \cup (-1; \infty)$ B: $\left(-\infty; -\dfrac{4}{3} \right\rangle \cup \left\langle -1; \infty \right)$ C: $\left\langle -\dfrac{4}{3}; \infty \right)$ D: $\left\langle -\dfrac{4}{3}; -1 \right) \cup$
$\cup (-1; \infty)$

---

14. Definičným oborom funkcie $f: y = \sqrt{\dfrac{4x + 1}{2 - x}}$ je:

A: $\left\langle -\dfrac{1}{4}; 2 \right)$ B: $\left\langle -\dfrac{1}{4}; \infty \right)$ C: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{4} \right\rangle \cup (2; \infty)$ D: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{4} \right\rangle \cup \left\langle 2; \infty \right)$

---

15. Definičným oborom funkcie $f: y = \sqrt{\dfrac{3x-2}{1-x}}$ je:

A: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right\rangle \cup (1; \infty)$ B: $\left\langle \frac{2}{3}; 1\right)$ C: $\left\langle \frac{2}{3}; 1\right\rangle$ D: $\left\langle \frac{2}{3}; \infty\right)$

---

16. Definičným oborom funkcie $f: y = \log(x+3) - \dfrac{1}{3x+1}$ je:

A: $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ B: $(-3; \infty)$ C: $\left(-3; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ D: $\left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$

---

17. Definičným oborom funkcie $f: y = \log_2(2-x) - \dfrac{x+3}{x}$ je:

A: $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ B: $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$ C: $(-\infty; 0) \cup (0; 2\rangle$ D: $(0; 2)$

---

18. Definičným oborom funkcie $f: y = \log_{\frac{1}{3}}(x+5) - \dfrac{2x}{x+1}$ je:

A: $\mathbb{R} - \{-1\}$ B: $\langle -5; -1) \cup (-1; \infty)$ C: $(-5; \infty)$ D: $(-5; -1) \cup (-1; \infty)$

---

19. Definičným oborom funkcie $f: y = \log_4(4-x) - \dfrac{5x-1}{x+2}$ je:

A: $(-\infty; -2) \cup (-2; 4)$ B: $(-\infty; -2) \cup (-2; 4\rangle$ C: $(4; \infty)$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

20. Definičným oborom funkcie $f: y = \dfrac{x^2-1}{x} - \log(7-x)$ je:

A: $(-\infty; 0) \cup (0; 7)$ B: $(-\infty; 0) \cup (0; 7\rangle$ C: $(7; \infty)$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

8 Riešenie kvadratických rovníc

8.1 Riešené príklady

Pri určovaní reálnych koreňov kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s koeficientami a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ najprv určíme hodnotu jej diskriminantu D, ktorý je definovaný takto:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Ak je diskriminant D záporný, kvadratická rovnica nemá reálne riešenie. Ak je $D \geqq 0$, tak reálne korene vypočítame podľa vzťahu[2]

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,. \tag{8.1}$$

Ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, tak kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ sa dá napísať v tvare súčinu koreňových činiteľov, t. j.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{8.2}$$

Ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + px + q = 0$, tak medzi koreňmi x_1, x_2 a koeficientami p, q kvadratickej rovnice platia Vietove vzťahy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p, \\ x_1 \cdot x_2 &= q. \end{aligned} \tag{8.3}$$

---

1. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + 2x - 8 = 0$, tak číslo $x_2 - x_1$ je:

   A: 6 B: -2 C: 2 D: žiadna odpoveď nie je správna

Riešenie. Korene danej rovnice vypočítame podľa vzťahu (8.1). V rovnici $x^2 + 2x - 8 = 0$ je $a = 1$, $b = 2$, $c = -8$. Pre diskriminant rovnice platí

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36.$$

Korene x_1, x_2 rovnice sú

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2}\,.$$

Hodnoty výrazu $\dfrac{-2 \pm 6}{2}$ sú

$$\frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2, \qquad \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Keďže korene rovnice majú spĺňať podmienku $x_1 < x_2$, tak $x_1 = -4$ a $x_2 = 2$.

Číslo $x_2 - x_1$ vypočítame dosadením získaných koreňov:

$$x_2 - x_1 = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6.$$

Správna odpoveď je A.

[2] Ak $D > 0$, tak korene x_1 a x_2 sú rôzne, v prípade $D = 0$ je $x_1 = x_2$, t. j. rovnica má jeden tzv. dvojnásobný koreň.

2. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $6x^2 + 5x + 1 = 0$, tak číslo $3x_2 + 2x_1$ je rovné:

   A: 0 B: -2 C: 2 D: žiadna odpoveď nie je správna

Riešenie. Korene kvadratickej rovnice $6x^2+5x+1 = 0$ vypočítame tak ako v príklade 1 podľa vzťahu (8.1), pričom $a = 6$, $b = 5$, $c = 1$. Pre diskriminant rovnice platí

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1.$$

Korene x_1, x_2 rovnice sú:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm 1}{12}.$$

Keďže korene rovnice majú spĺňať podmienku $x_1 < x_2$, tak x_1 zvolíme menší z koreňov rovnice. Teda:

$$x_1 = \frac{-5-1}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2},$$
$$x_2 = \frac{-5+1}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Hodnota výrazu $3x_2 + 2x_1$ je:

$$3x_2 + 2x_1 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - 1 = -2.$$

Správna je odpoveď B.

3. Ak kvadratická rovnica $x^2 + px - 18 = 0$ má jeden koreň $x_1 = -3$, tak druhý koreň x_2 a koeficient p sú:

   A: $x_2 = 6$, $p = 3$ B: $x_2 = 6$, $p = -9$ C: $x_2 = 6$, $p = -3$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Na výpočet použijeme Vietove vzťahy (8.3)

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Keďže poznáme jeden koreň danej kvadratickej rovnice, $x_1 = -3$, a koeficient $q = -18$, dosadením do vzťahu

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

dostávame

$$\begin{aligned} -3x_2 &= -18, \\ x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Dosadením koreňov $x_1 = -3$, $x_2 = 6$ do vzťahu

$$x_1 + x_2 = -p$$

vypočítame neznámy koeficient p:

$$\begin{aligned} -3 + 6 &= -p, \\ 3 &= -p, \\ p &= -3. \end{aligned}$$

Teda správna odpoveď je C.

---

4. Ak kvadratická rovnica $x^2 + 8x + q = 0$ má jeden koreň $x_1 = -5$, tak druhý koreň x_2 a koeficient q sú:

   A: $x_2 = -3$, $q = -15$ B: $x_2 = 3$, $q = 15$ C: $x_2 = 13$, $q = 39$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Známy koreň $x_1 = -5$ vyhovuje danej kvadratickej rovnici, a preto musí platiť rovnosť

$$(-5)^2 + 8 \cdot (-5) + q = 0.$$

Z nej určíme koeficient q:

$$\begin{aligned} 25 - 40 + q &= 0, \\ -15 + q &= 0, \\ q &= 15. \end{aligned}$$

Keďže okrem koreňa x_1 poznáme aj koeficient $p = 8$, dosadením do Vietovho vzťahu (8.3)

$$x_1 + x_2 = -p,$$

dostávame pre druhý koreň x_2 rovnicu

$$-5 + x_2 = -8,$$

a teda

$$x_2 = -3.$$

Pretože v žiadnej z odpovedí A, B, C nie je uvedený výsledok $x_2 = -3$, $q = 15$, správna odpoveď je D.

5. Všetky korene rovnice $x^2 - 4x - 21 = 0$ sú z intervalu:

A: $(-\infty; -10)$ B: $\langle -10; 3 \rangle$ C: $\langle -3; 10)$ D: $\langle 7; \infty)$

Riešenie. Korene kvadratickej rovnice vypočítame podľa vzťahu (8.1). V danej rovnici je $a = 1$, $b = -4$, $c = -21$. Pre diskriminant rovnice platí

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 100.$$

Korene x_1, x_2 danej rovnice sú:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 10}{2},$$

teda

$$x_1 = 7 \quad \text{a} \quad x_2 = -3.$$

Keďže $7 \notin (-\infty; -10)$ a $-3 \notin (-\infty; -10)$, odpoveď A nie je správna. Keďže $7 \notin \langle -10; 3 \rangle$, odpoveď B je nesprávna. Z toho, že $-3 \notin \langle 7; \infty)$ dostávame, že D je nesprávna odpoveď. Správna odpoveď je C, pretože $7 \in \langle -10; 3 \rangle$ a aj $-3 \in \langle -10; 3 \rangle$.

---

6. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $4x^2 - 25 = 0$, tak číslo $x_2 - x_1$ je:

A: 5 B: 0 C: -5 D: 2

Riešenie. Korene danej kvadratickej rovnice by sme mohli určiť napríklad podľa vzťahu (8.1), pričom $a = 4$, $b = 0$, $c = -25$. Je to takzvaná neúplná kvadratická rovnica, chýba v nej lineárny člen bx. Môžeme ju však vyriešiť aj nasledovnými ekvivalentnými úpravami

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 25, \quad / : 4 \\ x^2 &= \frac{25}{4}, \\ |x| &= \frac{5}{2} \cdot \end{aligned}$$

Z požiadavky $x_1 < x_2$ dostaneme

$$x_1 = -\frac{5}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{5}{2} \cdot$$

Potom platí

$$x_2 - x_1 = \frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{10}{2} = 5.$$

Teda správna odpoveď je A.

7. Jedna z kvadratických rovníc, ktoré majú oba korene o 5 väčšie ako rovnica $2x^2-x = = 0$ je:

A: $2x^2+21x+55 = 0$ B: $2x^2-21x+55 = 0$ C: $9x^2-10x = 0$ D: $x^2-10x+5 = 0$

Riešenie. Pretože rovnica $2x^2 - x = 0$ je neúplná kvadratická rovnica, neobsahuje absolútny člen, môžeme ju riešiť napríklad rozkladom na súčinový tvar. Vyberieme x pred zátvorku a dostaneme

$$2x^2 - x = x \cdot (2x - 1).$$

Potom platí

$$x \cdot (2x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \quad \vee \quad 2x - 1 = 0)\,,$$

teda

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}\,\cdot$$

Korene x_1^*, x_2^* hľadanej rovnice majú byť o 5 väčšie ako sú korene x_1, x_2, teda

$$\begin{aligned} x_1^* &= 5 + x_1 = 5 + 0 = 5, \\ x_2^* &= 5 + x_2 = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}\,\cdot \end{aligned}$$

Keďže poznáme korene hľadanej kvadratickej rovnice, rovnicu môžeme získať zo súčinového tvaru

$$\begin{aligned} (x - x_1^*) \cdot (x - x_2^*) &= 0, \\ (x - 5) \cdot \left(x - \frac{11}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Po roznásobení dostávame rovnicu

$$x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{55}{2} = 0.$$

Keďže koeficienty všetkých ponúknutých rovníc v odpovediach sú celé čísla, túto rovnicu vynásobíme číslom 2:

$$2x^2 - 21x + 55 = 0,$$

čo je rovnica v odpovedi B.

8. Ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $x^2 - 3x - 10 = 0$, tak číslo $x_1 \cdot x_2$ je dvojnásobný koreň rovnice:

A: $x^2 - 20x - 100 = 0$ B: $x^2 - 20x + 100 = 0$ C: $x^2 + 20x + 100 = 0$ D: $x^2 + 20x - 100 = 0$

Riešenie. Použitím Vietovych vzťahov (8.3) je možné určiť súčin $x_1 \cdot x_2$ priamo z danej rovnice:

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Pre kvadratickú rovnicu $x^2 - 3x - 10 = 0$ je

$$x_1 \cdot x_2 = q = -10,$$

čo má byť dvojnásobný koreň hľadanej kvadratickej rovnice.

Ak kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ má dvojnásobný koreň, označme ho napríklad x_0, tak ju môžeme zapísať v tvare

$$a(x - x_0)(x - x_0) = 0,$$

t. j.

$$a(x - x_0)^2 = 0,$$

kde a je ľubovoľné reálne číslo, $a \neq 0$.

Vo všetkých ponúkaných odpovediach je koeficient a pri x^2 rovný 1, a teda $a = 1$. Potom hľadanú kvadratickú rovnicu môžeme získať dosadením $x_0 = -10$ do rovnice

$$(x - x_0)^2 = 0.$$

Dostaneme

$$(x + 10)^2 = 0$$

a po umocnení

$$x^2 + 20x + 100 = 0.$$

Správna odpoveď je C.

8.2 Úlohy

---

1. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + 2x - 15 = 0$, tak číslo $x_2 - x_1$ je:

   A: -8 B: 2 C: 0 D: 8

---

2. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + 9x + 14 = 0$, tak číslo $2x_1 + x_2$ je:

   A: -16 B: -12 C: -11 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

3. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + x - 12 = 0$, tak číslo $x_1 - 2x_2$ je:

   A: -10 B: -5 C: 2 D: 11

4. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + 7x + 6 = 0$, tak číslo $x_1 - 3x_2$ je:

   A: -19 B: -9 C: -3 D: 17

---

5. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + 4x - 12 = 0$, tak číslo $2x_1 - x_2$ je:

   A: -14 B: -10 C: -2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

6. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $x^2 - 8x + 12 = 0$, tak číslo $x_2 - x_1$ je:

   A: -8 B: -4 C: 4 D: 8

---

7. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $4x^2 - 5x + 1 = 0$, tak číslo $\dfrac{x_2}{x_1}$ je:

   A: $\dfrac{1}{4}$ B: $\dfrac{4}{3}$ C: 1 D: 4

---

8. Všetky korene rovnice $2x^2 - 11x + 14 = 0$ sú z intervalu:

   A: $(-\infty; 4)$ B: $(-\infty; 2)$ C: $\langle 0; 2\rangle$ D: $(2; 4)$

---

9. Všetky korene rovnice $4x + 5 = x^2$ sú z intervalu:

   A: $\langle -5; 5)$ B: $(-5; 5\rangle$ C: $\langle -1; 0)$ D: $\langle 0; 5\rangle$

---

10. Ak kvadratická rovnica $x^2 + px + 10 = 0$ má jeden koreň $x_1 = -5$, tak druhý koreň x_2 a koeficient p sú:

    A: $x_2 = -2$, $p = -7$ B: $x_2 = -2$, $p = 7$ C: $x_2 = 2$, $p = 7$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

11. Ak kvadratická rovnica $x^2 + px - 12 = 0$ má jeden koreň $x_1 = 4$, tak druhý koreň x_2 a koeficient p sú:

    A: $x_2 = -8$, $p = 11$ B: $x_2 = -3$, $p = -1$ C: $x_2 = -3$, $p = 7$ D: $x_2 = 3$, $p = 1$

---

12. Ak kvadratická rovnica $x^2 + px - 16 = 0$ má jeden koreň $x_1 = 8$, tak druhý koreň x_2 a koeficient p sú:

    A: $x_2 = -8$, $p = 4$ B: $x_2 = -2$, $p = -6$ C: $x_2 = -2$, $p = 6$ D: $x_2 = 2$, $p = -6$

13. Ak kvadratická rovnica $x^2 - 2x + q = 0$ má jeden koreň $x_1 = 4$, tak druhý koreň x_2 a koeficient q sú:

A: $x_2 = -2$, $q = -8$ B: $x_2 = -\frac{1}{2}$, $q = -2$ C: $x_2 = \frac{1}{2}$, $q = 2$ D: $x_2 = 2$, $q = 8$

---

14. Ak kvadratická rovnica $x^2 - x + q = 0$ má jeden koreň $x_1 = 6$, tak druhý koreň x_2 a koeficient q sú:

A: $x_2 = -5$, $q = -30$ B: $x_2 = -3$, $q = -18$ C: $x_2 = 2$, $q = 12$ D: $x_2 = 5$, $q = 30$

---

15. Jedna z kvadratických rovníc, ktoré majú oba korene o 2 menšie ako rovnica $x^2 + 5x - 14 = 0$ je:

A: $x^2 - 9x = 0$ B: $x^2 - 3x + 12 = 0$ C: $x^2 + 3x - 12 = 0$ D: $x^2 + 9x = 0$

---

16. Jedna z kvadratických rovníc, ktoré majú oba korene o 5 väčšie ako rovnica

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

je:

A: $x^2 - 15x + 56 = 0$ B: $x^2 - 10x + 1 = 0$ C: $x^2 - 6x + 5 = 0$ D: $x^2 + 11 = 0$

---

17. Jedna z kvadratických rovníc, ktorých korene sú dvojnásobkami koreňov kvadratickej rovnice $4x^2 - 5x + 1 = 0$ je:

A: $8x^2 - 10x + 2 = 0$ B: $2x^2 - 5x + 2 = 0$ C: $x^2 - \frac{5}{2}x - 1 = 0$ D: $x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0$

---

18. Ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $x^2 - x - 2 = 0$, tak číslo $x_1 \cdot x_2$ je dvojnásobný koreň rovnice:

A: $2x^2 - 2x + 4 = 0$ B: $x^2 - 4x + 4 = 0$ C: $x^2 - x - 2 = 0$ D: $x^2 + 4x + 4 = 0$

---

19. Ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $x^2 - 9x + 8 = 0$, tak číslo $x_1 + x_2$ je dvojnásobný koreň rovnice:

A: $x^2 - 18x + 81 = 0$ B: $x^2 - 10x + 8 = 0$ C: $x^2 - 9x + 7 = 0$ D: $x^2 - 6x + 9 = 0$

---

20. Ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$, tak číslo $x_1 \cdot x_2$ je dvojnásobný koreň rovnice:

A: $x^2 - 4x - 4 = 0$ B: $x^2 - 4x + 4 = 0$ C: $x^2 + 4x - 4 = 0$ D: $x^2 + 4x + 4 = 0$

9 Exponenciálne výrazy a logaritmy

9.1 Riešené príklady

Pripomeňme si základné vlastnosti exponenciálnych výrazov. Pre ľubovoľné reálne čísla x a y a kladné číslo a, $a \neq 1$, platí:

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y, \tag{9.1}$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \tag{9.2}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \tag{9.3}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}. \tag{9.4}$$

S exponenciálnymi výrazmi úzko súvisí definícia logaritmu kladného čísla x pri základe a:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y, \quad \text{kde } a > 0,\, a \neq 1,\, x > 0. \tag{9.5}$$

Pri riešení logaritmických rovníc budeme potrebovať nasledujúce základné vlastnosti logaritmov. Nech x a y sú ľubovoľné kladné čísla a a je kladné číslo rôzne od jednej. Potom platí:

$$\log_a x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad x = y. \tag{9.6}$$

$$\log_a a = 1, \tag{9.7}$$

$$\log_a 1 = 0, \tag{9.8}$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y), \tag{9.9}$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}, \tag{9.10}$$

$$\log_a x^s = s \cdot \log_a x, \quad \text{pre ľubovoľné reálne číslo } s. \tag{9.11}$$

---

1. Všetky riešenia rovnice $9^{x+4} = 81^{2x-1}$ sú z intervalu:

   A: $(0; 2)$ B: $(4; \infty)$ C: $(3; 4)$ D: $(-4; 2\rangle$

Riešenie. Pretože

$$81 = 9^2,$$

tak obe strany danej exponenciálnej rovnice môžeme upraviť na rovnaký základ 9. Potom rovnica nadobudne tvar

$$9^{x+4} = \left(9^2\right)^{2x-1}.$$

Pravá strana tejto rovnice sa dá na základe (9.4) upraviť takto:

$$9^{x+4} = 9^{4x-2}.$$

Odtiaľ podľa (9.1) je

$$x + 4 = 4x - 2,$$

a teda

$$x = 2.$$

Správna odpoveď je D.

---

2. Riešením rovnice $3^{x+1} + 3^{x+2} + 15 \cdot 3^x = 27$ je číslo, ktoré je:

A: nepárne B: väčšie ako 2 C: menšie ako 1 D: záporné

Riešenie. Podľa (9.2) pre $a = 3$ je

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^x \qquad \text{a} \qquad 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x.$$

Daná rovnica je takto ekvivalentná s rovnicou

$$3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x + 15 \cdot 3^x = 27.$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} (3 + 9 + 15) \cdot 3^x &= 27, \\ 27 \cdot 3^x &= 27, \quad / : 27 \\ 3^x &= 1, \\ 3^x &= 3^0. \end{aligned}$$

Odtiaľ na základe (9.1) je

$$x = 0.$$

Správna odpoveď je C.

---

3. Všetky riešenia rovnice $4^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 32$ sú z intervalu:

A: $(-1; 3)$ B: $(2; \infty)$ C: $(-3; 2)$ D: $(4; 8\rangle$

Riešenie. Upravíme výrazy 4^{x+1}, resp. 4^{x-1} ľavej strany danej rovnice použijúc vzťahy (9.2), resp. (9.3), v ktorých $a = 4$:

$$4^x \cdot 4^1 - 8 \cdot \frac{4^x}{4^1} = 32.$$

Ďalej jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 4^x \cdot 4 - 4^x \cdot 2 &= 32, \\ 4^x \cdot (4-2) &= 32, \\ 4^x \cdot 2 &= 32, \\ 4^x &= 16. \end{aligned}$$

Keďže $16 = 4^2$, tak posledná rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$4^x = 4^2,$$

z ktorej vzhľadom na (9.1) je

$$x = 2.$$

Číslo 2 patrí do jediného z uvedených intervalov, a to do intervalu $(-1; 3)$. Preto správna odpoveď je A.

---

4. Ak $\log_5 x = 2$, tak $\log_5 x^3$ je:

   A: 6 B: 2 C: 5 D: 3

Riešenie. Využijeme vzťah (9.11)

$$\log_5 x^3 = 3 \cdot \log_5 x = 3 \cdot 2 = 6.$$

Správna odpoveď je A.

---

5. Ak $\log_3 x = 4$, tak $\log_9 x$ je:

   A: 1 B: 2 C: 3 D: 4

Riešenie. Zo vzťahu (9.5) vyplýva

$$\log_3 x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^4 = 81.$$

Ak do výrazu $\log_9 x$ dosadíme za x číslo 81, využijúc vzťahy (9.11), (9.7) dostávame

$$\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2 \cdot \log_9 9 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Teda správna je odpoveď B.

6. Ak $\log x = 2$, tak $\log_x 10\,000$ je:

A: 1 B: 2 C: 10 D: 100

Riešenie. Zo vzťahu (9.5) vyplýva

$$\log x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^2 = 100.$$

Ak do výrazu $\log_x 10\,000$ dosadíme za x číslo 100 a využijeme vzťahy (9.11), (9.7) dostávame

$$\log_{100} 10\,000 = \log_{100} 100^2 = 2 \cdot \log_{100} 100 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Teda správna je odpoveď B.

7. Koreň rovnice $\log_3(x+3) - 3 \cdot \log_3 2 = 1$ je:

A: párne číslo B: prvočíslo C: deliteľný tromi D: deliteľný piatimi

Riešenie. Logaritmus je definovaný len pre kladné čísla. Preto musí byť splnená podmienka:

$$x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3.$$

Využijúc vzťah (9.11) môžeme danú rovnicu zapísať v tvare

$$\log_3(x+3) - \log_3 2^3 = 1$$

a podľa (9.10) je

$$\log_3 \frac{x+3}{2^3} = 1.$$

Pravú stranu rovnice, číslo 1, zapíšeme v tvare logaritmu podľa vzťahu (9.7). Potom

$$\log_3 \frac{x+3}{8} = \log_3 3.$$

Z vlastnosti (9.6) dostaneme rovnicu

$$\frac{x+3}{8} = 3,$$

ktorú vyriešime jednoduchými úpravami:

$$\begin{aligned} x + 3 &= 24, \\ x &= 21. \end{aligned}$$

Číslo 21 spĺňa podmienku $x > -3$, a teda je koreňom danej rovnice. Keďže 21 nie je párne číslo, odpoveď A nie je správna. Číslo 21 nie je prvočíslo, lebo $21 = 3 \cdot 7$, a preto odpoveď B nie je správna. Číslo 21 je deliteľné tromi, a teda správna odpoveď je C.

---

8. Koreň rovnice $\log_3(x+2) + \log_3(x-1) = 2\log_3 x$ je:

   A: nepárne číslo B: párne číslo C: deliteľný tromi D: deliteľný piatimi

---

Riešenie. Súčasťou riešenia logaritmických rovníc je určenie podmienok, pri ktorých všetky výrazy v rovnici existujú. Výraz $\log t$ je definovaný len pre kladné čísla t.

Výrazy v danej rovnici sú definované, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

$$x + 2 > 0 \quad \wedge \quad x - 1 > 0 \quad \wedge \quad x > 0,$$

t. j.

$$x > -2 \quad \wedge \quad x > 1 \quad \wedge \quad x > 0.$$

Z toho vyplýva, že $x > 1$.

Danú rovnicu najprv vhodnými úpravami prepíšeme na tvar

$$\log_3 V_1(x) = \log_3 V_2(x).$$

Ľavú stranu rovnice upravíme podľa vzťahu (9.9), pri úprave pravej strany využijeme vzťah (9.11). Teda rovnicu

$$\log_3(x+2) + \log_3(x-1) = 2\log_3 x$$

napíšeme v tvare:

$$\log_3 \big[(x+2)\cdot(x-1)\big] = \log_3 x^2.$$

Odtiaľ na základe vlastnosti (9.6) dostaneme rovnicu

$$(x+2)\cdot(x-1) = x^2.$$

Túto rovnicu vyriešime ekvivalentnými úpravami

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= x^2, \\ x - 2 &= 0, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Párne číslo 2 spĺňa podmienku $x > 1$, teda je koreňom danej rovnice. Správna je odpoveď B.

9.2 Úlohy

---

1. Rovnica $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x+3}$ má v množine reálnych čísel:

   A: 0 riešení B: 1 riešenie C: 2 riešenia D: 3 riešenia

---

2. Rovnica $3^{2x-5} = 243$ má v množine reálnych čísel jediný koreň, ktorý je z intervalu:

   A: $(-\infty; -3)$ B: $\langle -3; 3)$ C: $\langle 3; 243)$ D: $\langle 243; \infty)$

---

3. Rovnica $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 39$ má v množine reálnych čísel jeden koreň, ktorý je z intervalu:

   A: $(-\infty; 0)$ B: $\langle 0; 1)$ C: $\langle 1; 39)$ D: $\langle 39; \infty)$

---

4. Rovnica $9^{3x-1} = 3^{8x-2}$ má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je:

   A: rovné číslu -1 B: menšie ako 1 C: väčšie ako 2 D: z intervalu $\langle 3; 9\rangle$

---

5. Rovnica $3^x \cdot 4 + 3^x \cdot 3 + 3^x = 216$ má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je:

   A: záporné B: dvojciferné C: párne D: deliteľné troma

---

6. Súčin koreňov rovnice $4^{x^2-2x-15} = 1$ v množine reálnych čísel je:

   A: -15 B: -5 C: 2 D: 15

---

7. Ak $\log_2 x = 2$, tak $\log_2 x^3$ je:

   A: 2 B: 4 C: 6 D: 8

---

8. Ak $\log x = 2$, tak $\log_x 100$ je:

   A: 0 B: $\frac{1}{2}$ C: 1 D: 100

---

9. Ak $\log_2 x = 4$, tak $\log_4 x$ je:

   A: 2 B: 4 C: 8 D: 16

---

10. Ak $\log_3 x = 2$, tak $4 \cdot \log_x 81$ je:

    A: 2 B: 4 C: 8 D: 9

11. Ak $\log_4 x^2 = 1$ a $x > 0$, tak $\frac{1}{2} \cdot \log_4 x$ je:

A: 0 B: $\frac{1}{4}$ C: $\frac{1}{2}$ D: 1

---

12. Ak $\log_5 x^2 = 4$ a $x > 0$, tak $3 \cdot \log_5 x$ je:

A: 1 B: 2 C: 3 D: 6

---

13. Ak $\log x^{10} = 20$ a $x > 0$, tak $7 \cdot \log x$ je:

A: 1 B: 7 C: 14 D: 140

---

14. Rovnica $\log_4 (x + 3) = 0$ má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je:

A: záporné B: dvojciferné C: nepárne D: deliteľné piatimi

---

15. Rovnica $\log_3 (2x + 5) = 4$ má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je z intervalu:

A: $(-\infty; 2)$ B: $\langle 2; 5)$ C: $\langle 5; 38)$ D: $\langle 38; \infty)$

---

16. Rovnica $\log_8 (3x - 1) = 1$ má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je z intervalu:

A: $(-\infty; 3)$ B: $\langle 3; 8)$ C: $\langle 8; 27)$ D: $\langle 27; \infty)$

---

17. Rovnica $\log_{0,2} (2x - 7) = 0$ má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je z intervalu:

A: $(-\infty; 0{,}2)$ B: $\langle 0{,}2; 4)$ C: $\langle 4; 7)$ D: $\langle 7; \infty)$

---

18. Rovnica $\log_5 \left(2x - \frac{9}{4}\right) - \log_5 (x - 3) = \log_5 x$ v množine reálnych čísel:

A: nemá riešenie B: má jedno riešenie C: má dve riešenia D: má nekonečne veľa riešení

---

19. Rovnica $\log_2 (3 - x) + \log_2 (1 - x) = 3$ v množine reálnych čísel:

A: nemá riešenie B: má jedno riešenie C: má dve riešenia D: má nekonečne veľa riešení

---

20. Rovnica $\log^2 x - \log x = 0$ má v množine reálnych čísel dve riešenia, pričom obidve sú:

A: menšie ako 0 B: kladné C: väčšie ako 2 D: párne

10 Priamka, polpriamka a úsečka v rovine

10.1 Riešené príklady

Na úvod zhrnieme základné poznatky súvisiace s priamkami, polpriamkami a s úsečkami v rovine.

Ak je priamka daná bodom $A = [a_1; a_2]$ a nenulovým smerovým vektorom $\vec{s} = (s_1; s_2)$, tak jej parametrické rovnice sú:

$$x = a_1 + s_1 t, \quad y = a_2 + s_2 t, \tag{10.1}$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je parameter. Ak parameter t nadobúda hodnoty z intervalu typu $(-\infty; d\rangle$ alebo z intervalu typu $\langle c; \infty)$, c, $d \in \mathbb{R}$, tak rovnica (10.1) je analytickým vyjadrením polpriamky. V prípade, ak je t z uzavretého intervalu $\langle c; d\rangle$, tak rovnica (10.1) vyjadruje úsečku, pričom hodnote parametra $t = c$ zodpovedá v (10.1) jeden krajný bod úsečky a hodnote $t = d$ zodpovedá jej druhý krajný bod.

Ak poznáme dva rôzne body $A = [a_1; a_2]$ a $B = [b_1; b_2]$, ktoré ležia na priamke, môžeme jeden zo smerových vektorov priamky určiť pomocou vzťahu

$$\vec{s} = B - A = (b_1 - a_1; b_2 - a_2). \tag{10.2}$$

Normálový vektor $\vec{n} = (n_1; n_2)$ priamky je nenulový vektor, ktorý je kolmý na jej smerový vektor $\vec{s} = (s_1; s_2)$. Dva nenulové vektory sú na seba kolmé práve vtedy, keď ich skalárny súčin je rovný nule. Z toho vyplýva, že súradnice jedného z normálových vektorov môžeme dostať tak, že zameníme poradie súradníc smerového vektora a pri jednej súradnici (ľubovoľnej) zmeníme znamienko na opačné, t. j. napríklad

$$\vec{n} = (n_1; n_2) = (s_2; -s_1). \tag{10.3}$$

Ak sú dve priamky p a q na seba kolmé, tak aj ich smerové vektory sú na seba kolmé, teda

$$\vec{s}_p \perp \vec{s}_q$$

a aj ich normálové vektory sú tiež na seba kolmé, t. j.

$$\vec{n}_p \perp \vec{n}_q.$$

Keďže pre priamky p a q platí

$$\vec{s}_p \perp \vec{n}_p, \quad \vec{s}_q \perp \vec{n}_q$$

dostávame, že pre kolmé priamky platí

$$\vec{s}_p \parallel \vec{n}_q, \quad \vec{s}_q \parallel \vec{n}_p. \tag{10.4}$$

Dva nenulové vektory $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2)$ sú rovnobežné (kolineárne) práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého, t. j.

$$\vec{u} = \ell\vec{v},$$
$$(u_1; u_2) = (\ell v_1; \ell v_2),$$

kde $\ell \in \mathbb{R}$.

Všeobecná rovnica priamky p je

$$ax + by + c = 0, \tag{10.5}$$

kde a, b sú súradnice normálového vektora $\vec{n}$ priamky, t. j. $\vec{n} = (a, b)$.

Smernicový tvar rovnice priamky p je

$$y = kx + q. \tag{10.6}$$

Číslo k sa nazýva smernica priamky. Poznamenajme, že

$$k = \operatorname{tg} \alpha, \tag{10.7}$$

kde α je veľkosť uhla, ktorý zviera priamka s kladnou časťou osi x. Číslo q predstavuje „úsek“, ktorý vytína priamka na osi y, t. j. bod $[0; q]$ je priesečníkom danej priamky s osou y.

Ak poznáme dva body $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $a_1 \neq b_1$, ktoré ležia na priamke, môžeme smernicu priamky určiť tiež pomocou vzťahu

$$k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}. \tag{10.8}$$

---

1. Parametrické rovnice priamky prechádzajúcej bodmi $M = [3; 5]$, $N = [9; 7]$ sú:

   A: $x = 3 + 3t,\ y = 5 + t,\ t \in \mathbb{R}$ B: $x = 3 + t,\ y = 5 + 3t,\ t \in \mathbb{R}$ C: $x = 3 + 3t,\ y = 5 - t,\ t \in \mathbb{R}$ D: $x = 3 - t,\ y = 5 + 3t,\ t \in \mathbb{R}$

Riešenie. Na zápis parametrických rovníc (10.1) priamky potrebujeme poznať jeden bod ležiaci na tejto priamke (na základe ponúknutých odpovedí zvoľme napríklad bod $M = [3; 5]$). Smerový vektor priamky je napríklad vektor určený bodmi M a N podľa vzťahu (10.2):

$$\vec{s} = M - N = (3 - 9; 5 - 7) = (-6; -2) = -2 \cdot (3; 1).$$

Keďže vektory $(-6; -2)$ a $(3; 1)$ sú kolineárne, je aj vektor $(3; 1)$ smerovým vektorom danej priamky. Dosadením súradníc bodu M a súradníc smerového vektora do (10.1) dostávame požadované parametrické rovnice

$$x = 3 + 3t, \quad y = 5 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dá sa ukázať, že zo smerových vektorov ponúknutých štyroch vyjadrení priamok – (3;1), (1;3), $(3; -1)$ a $(-1; 3)$ – je len prvý kolineárny s vektorom $(-6; -2)$, a teda správna odpoveď je A.

---

2. Priamka prechádzajúca bodmi $A = [2; -1]$, $B = [5; 4]$ má smernicu rovnú:

   A: $\frac{5}{3}$ B: $-\frac{5}{3}$ C: $\frac{3}{5}$ D: $-\frac{3}{5}$

Riešenie. Keďže pre prvé súradnice bodov A a B platí

$$2 = a_1 \neq b_1 = 5,$$

tak smernicu k priamky určíme pomocou vzťahu (10.8):

$$k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{4 - (-1)}{5 - 2} = \frac{5}{3}.$$

Teda správna odpoveď je A.

---

3. Jedna zo všeobecných rovníc priamky prechádzajúcej bodmi $M = [1; 2]$ a $N = [3; -1]$ je:

   A: $3x + 2y - 7 = 0$ B: $2x - 3y + 4 = 0$ C: $3x - 2y + 1 = 0$ D: $x + 4y - 9 = 0$

Riešenie. Na určenie všeobecnej rovnice priamky $ax + by + c = 0$ potrebujeme jej normálový vektor. Ten môžeme určiť napríklad zo smerového vektora priamky. Daná priamka prechádza bodmi $M = [1; 2]$ a $N = [3; -1]$, teda jej smerový vektor je podľa (10.2) napríklad

$$\vec{s} = M - N = (1 - 3; 2 - (-1)) = (-2; 3).$$

Normálový vektor $\vec{n}$ priamky dostaneme známou zámenou súradníc smerového vektora a zmenou znamienka jednej zo súradníc (pozri (10.3)):

$$\vec{n} = (3; 2).$$

Po dosadení do všeobecnej rovnice priamky dostávame

$$3x + 2y + c = 0.$$

Keďže daná priamka prechádza bodom $M = [1; 2]$, musia jeho súradnice $x = 1$ a $y = 2$ vyhovovať rovnici priamky, teda

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + c = 0.$$

Odtiaľ určíme koeficient c:

$$\begin{aligned} 7 + c &= 0, \\ c &= -7. \end{aligned}$$

Zhrnutím dostávame všeobecnú rovnicu danej priamky

$$3x + 2y - 7 = 0.$$

Preto je správna odpoveď A.

Poznamenávame, že pre ľubovoľné reálne číslo $\ell \neq 0$ je aj rovnica

$$(3\ell)x + (2\ell)y - (7\ell) = 0.$$

všeobecnou rovnicou danej priamky.

---

4. Súradnice stredu úsečky danej vzťahmi $x = -4 + 5t,\ y = 2 - 3t,\ t \in \langle -1; 3 \rangle$ sú:

   A: $[1; -1]$ B: $[-4; 2]$ C: $[-9; 5]$ D: $[11; -7]$

Riešenie. Stredu $S = [x_s; y_s]$ danej úsečky zodpovedá v (10.1) stred intervalu $\langle -1; 3 \rangle$, ktorý označíme symbolom t_s. Stred intervalu je aritmetický priemer krajných bodov intervalu, t. j.

$$t_s = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Potom

$$\begin{aligned} x_s &= -4 + 5t_s = -4 + 5 \cdot 1 = -4 + 5 = 1, \\ y_s &= 2 - 3t_s = 2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1. \end{aligned}$$

Teda

$$S = [x_s; y_s] = [1; -1].$$

Správna odpoveď je A.

---

5. Jeden z normálových vektorov priamok kolmých na priamku danú parametrickými rovnicami $x = 2 + 3t,\ y = -1 + 5t,\ t \in \mathbb{R}$ je:

   A: $(3; 5)$ B: $(-3; 5)$ C: $(5; 3)$ D: $(5; -3)$

Riešenie. Jeden zo smerových vektorov danej priamky, označme ju p, je podľa parametrických rovníc (10.1) vektor

$$\vec{s}_p = (3; 5).$$

Nech q je ľubovoľná priamka kolmá na danú priamku p. Potom normálový vektor všetkých priamok kolmých na priamku p je na základe (10.4) napríklad vektor

$$\vec{n}_q = (3; 5).$$

Správna odpoveď je A.

6. Priamka daná rovnicou $\sqrt{3}x - y - 4 = 0$ zviera s kladnou časťou osi x uhol veľkosti:

   A: $\frac{\pi}{6}$ B: $\frac{\pi}{4}$ C: $\frac{\pi}{3}$ D: $\frac{\pi}{2}$

Riešenie. Požadovanú veľkosť uhla dostaneme zo smernicového tvaru (10.6) rovnice priamky na základe vzťahu (10.7).

Upravme všeobecnú rovnicu danej priamky na smernicový tvar, čo dosiahneme vyjadrením premennej y:

$$\sqrt{3}x - y - 4 = 0, \quad / + y$$
$$y = \sqrt{3}\,x - 4.$$

Odtiaľ dostávame smernicu $k = \sqrt{3}$ a na základe (10.7) je

$$\operatorname{tg}\alpha = k = \sqrt{3}.$$

Z tabuľky na strane 101 dostaneme hodnotu $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Správna odpoveď je C.

7. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodom $A = [2; 3]$ a zvierajúcej s kladnou časťou osi x uhol veľkosti $-\frac{\pi}{4}$ je:

   A: $x+y-5 = 0$ B: $x-y+1 = 0$ C: $\sqrt{2}x-2y+6-2\sqrt{2} = 0$ D: $\sqrt{2}x+2y-6-2\sqrt{2} =$ $= 0$

Riešenie. Najprv určíme smernicový tvar danej priamky p. Na základe (10.7) je smernica priamky

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Dosadením do smernicového tvaru (10.6) priamky dostávame rovnicu priamky

$$y = -x + q.$$

Táto priamka má prechádzať bodom $A = [2; 3]$, a preto jeho súradnice $x = 2$ a $y = 3$ musia vyhovovať tejto rovnici. Teda

$$3 = -2 + q$$

a odtiaľ

$$q = 5.$$

Teda smernicový tvar priamky je

$$y = -x + 5.$$

Po úprave dostávame všeobecnú rovnicu danej priamky

$$x + y - 5 = 0.$$

Správna odpoveď je A.

---

8. Priamka p_1 má všeobecnú rovnicu $2x + 3y - 1 = 0$ a priamka p_2 má parametrické rovnice $x = 2 + 4t,\ y = -1 - 3t,\ t \in \mathbb{R}$. Priamky p_1 a p_2 sú:

   A: rôznobežné B: rovnobežné C: totožné D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Je známe, že

1. dve priamky sú rôznobežné práve vtedy, keď majú len jeden spoločný bod;
2. dve priamky sú rovnobežné, ale rôzne práve vtedy, keď nemajú spoločný bod;
3. dve priamky sú totožné práve vtedy, keď majú nekonečne veľa spoločných bodov.

Takto nám stačí zistiť, koľko spoločných bodov majú dané priamky. Ak $P = [x; y]$ je nejaký spoločný bod týchto priamok, tak jeho súradnice vyhovujú všetkým rovniciam, ktorými sú priamky dané, t. j. spĺňajú tieto tri rovnice:

$$2x + 3y - 1 = 0 \quad \wedge \quad x = 2 + 4t \quad \wedge \quad y = -1 - 3t. \tag{10.9}$$

Ak dosadíme vyjadrenia x a y z druhej a tretej rovnice do prvej rovnice, dostaneme rovnicu

$$2(2 + 4t) + 3(-1 - 3t) - 1 = 0.$$

Jednoduchými úpravami získame

$$\begin{aligned} 4 + 8t - 3 - 9t - 1 &= 0, \\ t &= 0. \end{aligned}$$

Z druhej a tretej rovnice v (10.9) je

$$\begin{aligned} x &= 2 + 4 \cdot 0 = 2, \\ y &= -1 - 3 \cdot 0 = -1. \end{aligned}$$

Zistili sme, že sústava (10.9) má jediné riešenia, a teda bod $P = [2; -1]$ je jediným spoločným bodom daných priamok. Priamky p_1 a p_2 sú rôznobežné. Správna odpoveď je A.

9. Priamka p má všeobecnú rovnicu $6x - 4y + 5 = 0$ a priamka q má parametrické rovnice $x = -\frac{1}{2} + 2t,\ y = \frac{1}{2} + 3t,\ t \in \mathbb{R}$. Priamky p a q sú:

A: rôznobežné B: rovnobežné C: totožné D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Pri určovaní vzájomnej polohy dvoch priamok p a q v rovine nám môžu pomôcť ich smerové (alebo normálové) vektory. Nech $\vec{s}_p$ respektíve $\vec{s}_q$ sú smerové vektory priamok p respektíve q. Potom v súlade s predchádzajcim príkladom, ak platí:

1. $\vec{s}_p \neq \ell \vec{s}_q$ pre všetky nenulové reálne čísla ℓ, tak priamky sú rôznobežné;

2. $\vec{s}_p = \ell \vec{s}_q$ pre nejaké nenulové reálne číslo ℓ a aspoň jeden bod priamky p neleží na priamke q, tak priamky sú rovnobežné ale rôzne, t. j. priamky nemajú spoločný bod;

3. $\vec{s}_p = \ell \vec{s}_q$ pre nejaké nenulové reálne číslo ℓ a aspoň jeden bod priamky p leží na priamke q, tak priamky sú totožné.

Rovnaké tvrdenia platia aj pre normálové vektory priamok.

Normálový vektor $\vec{n}_p$ priamky $p:\ 6x - 4y + 5 = 0$ je

$$\vec{n}_p = (6; -4).$$

Na základe (10.3) je

$$\vec{s}_p = (4; 6)$$

smerový vektor priamky p.

Za smerový vektor $\vec{s}_q$ priamky q: $x = -\frac{1}{2} + 2t,\ y = \frac{1}{2} + 3t,\ t \in \mathbb{R}$, zvoľme podľa (10.1) vektor

$$\vec{s}_q = (2; 3).$$

Skúsme zistiť, či existuje také číslo $\ell \neq 0$, aby platilo $\vec{s}_p = \ell \vec{s}_q$, t. j. $(4; 6) = \ell \cdot (2; 3)$. Porovnaním prvých súradníc dostávame

$$4 = \ell \cdot 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = \frac{4}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 2.$$

Keďže aj pre druhé súradnice smerových vektorov pre $\ell = 2$ platí

$$6 = 2 \cdot 3 = \ell \cdot 3,$$

zistili sme, že vektory $\vec{s}_p$ a $\vec{s}_q$ sú kolineárne, a preto nastáva prípad 2 alebo 3. Zvolíme ľubovoľný bod jednej z priamok p alebo q, napríklad pre priamku q zvolíme hodnotu parametra $t = 0$ a dostávame bod

$$Q = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

Súradnice bodu $Q = [x_q; y_q]$ dosadíme do rovnice priamky p, čím overíme, či bod Q leží aj na priamke p:

$$6x_q - 4y_q + 5 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 = -3 - 2 + 5 = 0.$$

Teda bod Q leží súčasne na priamke p aj q, čiže nastal prípad 3. Priamky sú totožné, správna odpoveď je C.

Poznámka. Podobne ako pri riešení predchádzajúceho príkladu by sme sa po dosadení x a y z parametrických rovníc priamky q do rovnice priamky p presvedčili, že platí

$$6x_q - 4y_q + 5 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2} + 2t\right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + 3t\right) + 5 = -3 + 12t - 2 - 12t + 5 = 0,$$

a teda každý bod priamky q je súčasne bodom priamky p, čo znamená, že priamky p a q sú totožné.

10.2 Úlohy

---

1. Parametrické rovnice priamky prechádzajúcej bodmi $A = [-1; 2]$, $B = [2; 5]$ sú:

   A: $x = -1 - 7t$, $y = 2 + t$, $t \in \mathbb{R}$ B: $x = -1 + t$, $y = 2 + t$, $t \in \mathbb{R}$ C: $x = -1 + t$, $y = 2 + 7t$, $t \in \mathbb{R}$ D: $x = -1 + 3t$, $y = 2 - 3t$, $t \in \mathbb{R}$

---

2. Parametrické rovnice priamky prechádzajúcej bodmi $B = [1; 6]$, $C = [3; 5]$ sú:

   A: $x = 3 - t$, $y = 5 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$ B: $x = 3 + t$, $y = 5 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$ C: $x = 3 + 2t$, $y = 5 - t$, $t \in \mathbb{R}$ D: $x = 3 + 4t$, $y = 5 + 11t$, $t \in \mathbb{R}$

---

3. Priamka prechádzajúca bodmi $U = [-2; -2]$, $V = [3; -3]$ má smernicu rovnú:

   A: -5 B: $-\frac{1}{5}$ C: $\frac{1}{5}$ D: 5

---

4. Priamka prechádzajúca bodmi $M = [1; 3]$, $N = [4; 3]$ má smernicu rovnú:

   A: $-\frac{6}{5}$ B: $-\frac{5}{6}$ C: 0 D: $\frac{5}{6}$

---

5. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodmi $A = [-1; 3]$, $B = [4; 2]$ je:

   A: $x + 5y - 14 = 0$ B: $5x - y + 8 = 0$ C: $5x + y + 2 = 0$ D: $5x + 3y - 4 = 0$

---

6. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodmi $A = [5; -2]$, $B = [3; -1]$ je:

   A: $x + 2y - 1 = 0$ B: $2x - y - 14 = 0$ C: $2x + y - 8 = 0$ D: $8x - 3y - 46 = 0$

---

7. Rovnice $x = 2 + 3t,\ y = -1 + 5t,\ t \in \mathbb{R}$ sú rovnicami:

   A: úsečky B: polpriamky C: priamky D: roviny

---

8. Rovnice $x = -t,\ y = 2 + t,\ t \in \langle 2; \infty)$ sú rovnicami:

   A: úsečky B: polpriamky C: priamky D: roviny

---

9. Rovnice $x = 3 - 4t,\ y = 1 + 3t,\ t \in \langle -1; 4 \rangle$ sú rovnicami:

   A: úsečky B: polpriamky C: priamky D: roviny

---

10. Súradnice stredu úsečky danej vzťahmi $x = 2 - 2t,\ y = 3 + 4t,\ t \in \langle -2; 4 \rangle$ sú:

    A: $[-6; 19]$ B: $[0; 7]$ C: $[2; 3]$ D: $[6; -5]$

---

11. Súradnice stredu úsečky danej vzťahmi $x = 1 - 3t,\ y = 2 + 2t,\ t \in \langle -3; 1 \rangle$ sú:

    A: $[-2; 4]$ B: $[1; 2]$ C: $[4; 0]$ D: $[7; 6]$

---

12. Jeden z normálových vektorov priamok rovnobežných s priamkou danou parametrickými rovnicami $x = 1 - t,\ y = 4t,\ t \in \mathbb{R}$ je:

    A: $(1; -4)$ B: $(1; 4)$ C: $(4; -1)$ D: $(4; 1)$

---

13. Jeden zo smerových vektorov priamok kolmých na priamku danú všeobecnou rovnicou $3x + 5y - 7 = 0$ je:

    A: $(-5; 3)$ B: $(-3; 5)$ C: $(3; 5)$ D: $(5; 3)$

---

14. Jeden zo smerových vektorov všetkých priamok rovnobežných s priamkou danou rovnicou $2x - 3y + 1 = 0$ je:

    A: $(-3; 2)$ B: $(2; -3)$ C: $(2; 3)$ D: $(3; 2)$

---

15. Priamka daná rovnicou $x - y + 7 = 0$ zviera s kladnou časťou osi x uhol veľkosti:

    A: $-\frac{\pi}{4}$ B: $\frac{\pi}{6}$ C: $\frac{\pi}{4}$ D: $\frac{\pi}{3}$

---

16. Priamka daná rovnicou $2x + 2y + 3 = 0$ zviera s kladnou časťou osi x uhol veľkosti:

    A: $-\frac{\pi}{6}$ B: $\frac{\pi}{3}$ C: $\frac{\pi}{2}$ D: $\frac{3\pi}{4}$

---

17. Priamka so všeobecnou rovnicou $3x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ zviera s kladnou časťou osi x uhol veľkosti:

    A: $\frac{\pi}{6}$ B: $\frac{\pi}{4}$ C: $\frac{\pi}{3}$ D: $\frac{\pi}{2}$

18. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodom $A = [0; 3]$ zvierajúcej s kladnou časťou osi x uhol veľkosti $\frac{\pi}{4}$ je:

A: $x - y + 3 = 0$ B: $x + y - 3 = 0$ C: $\sqrt{2}x - 2y + 6 = 0$ D: $\sqrt{2}x + 2y - 6 = 0$

---

19. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodom $A = [1; 3]$ zvierajúcej s kladnou časťou osi x uhol veľkosti $\frac{\pi}{3}$ je:

A: $x-2y+5 = 0$ B: $x-\sqrt{3}y-1+3\sqrt{3} = 0$ C: $x+2y-7 = 0$ D: $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}+3 = 0$

---

20. Priamky dané všeobecnou rovnicou $x + 2y - 3 = 0$ a parametrickými rovnicami $x = 1 + 2t,\ y = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}$ sú:

A: rôznobežné B: rovnobežné C: totožné D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

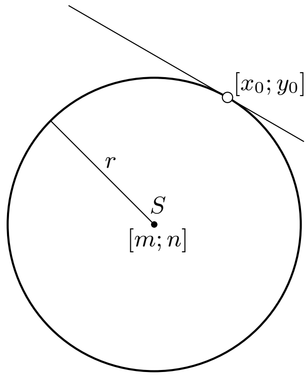
11 Kužeľosečky

11.1 Riešené príklady

V úvode uvedieme rovnice kužeľosečiek v stredovom, resp. vrcholovom tvare a rovnice dotyčníc k jednotlivým kužeľosečkám v dotykovom bode kužeľosečky $[x_0; y_0]$.

- Kružnica so stredom $S = [m; n]$ a polomerom r má rovnicu

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2. \tag{11.1}$$

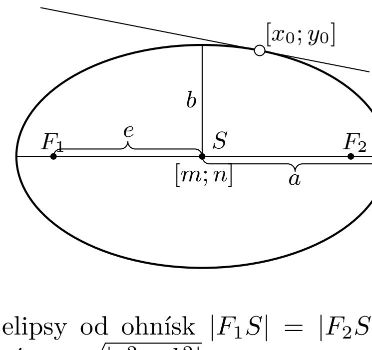


Rovnica dotyčnice v dotykovom bode $[x_0; y_0]$ je

$$(x_0-m)(x-m) + (y_0-n)(y-n) = r^2. \tag{11.2}$$

- Elipsa so stredom $S = [m; n]$ a polosami a, b má rovnicu

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1. \tag{11.3}$$



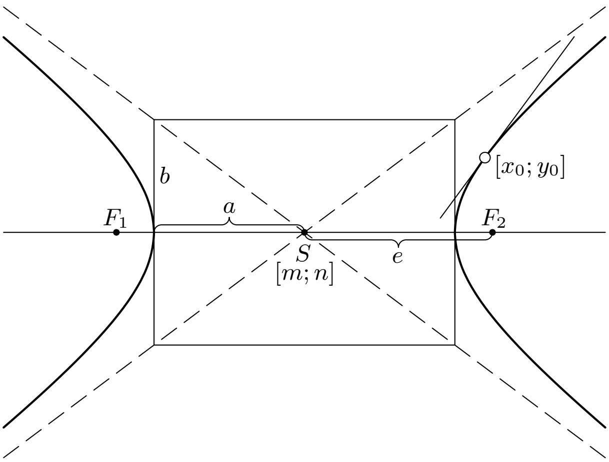
Vzdialenosť stredu elipsy od ohnísk $|F_1S| = |F_2S| = e$, kde e je excentricita elipsy, pre ktorú platí $e = \sqrt{|a^2 - b^2|}$.

Rovnica dotyčnice v dotykovom bode $[x_0; y_0]$ je

$$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} + \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1. \tag{11.4}$$

- Hyperbola so stredom $S = [m; n]$, polosami a, b a osou[3] rovnobežnou s osou x má rovnicu

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1. \tag{11.5}$$

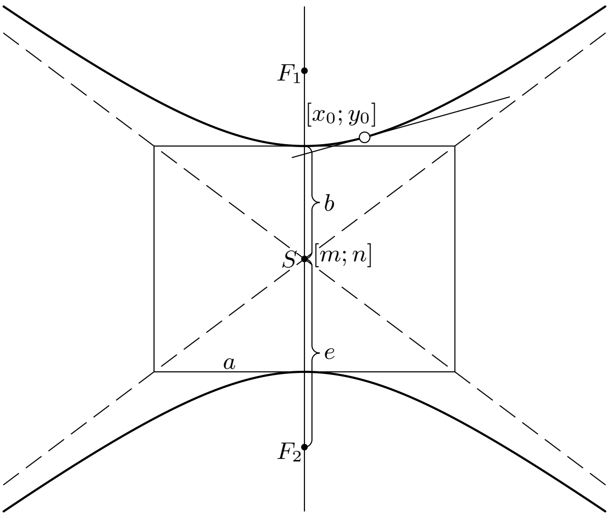


Rovnica dotyčnice v dotykovom bode $[x_0; y_0]$ je

$$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} - \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1. \tag{11.6}$$

Hyperbola so stredom $S = [m; n]$, polosami a, b a osou rovnobežnou s osou y má rovnicu

$$-\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1. \tag{11.7}$$



[3]Osou hyperboly rozumieme priamku, na ktorej ležia jej ohniská.

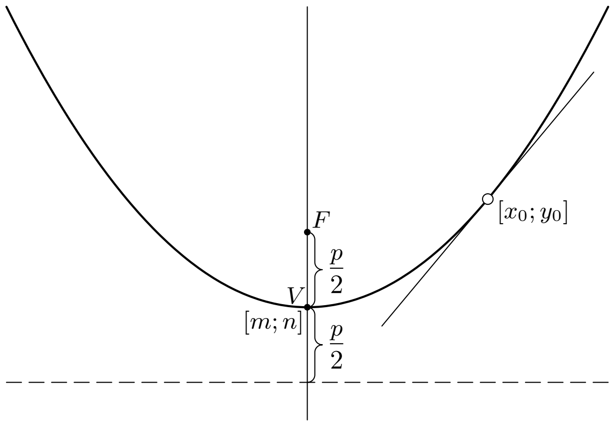
Rovnica dotyčnice v dotykovom bode $[x_0; y_0]$ je

$$-\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}+\frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2}=1. \tag{11.8}$$

Vzdialenosť stredu hyperboly od ohnísk $|F_1S| = |F_2S| = e$, kde e je excentricita hyperboly, pre ktorú platí $e = \sqrt{a^2+b^2}$.

- Parabola s vrcholom $V = [m; n]$, s osou rovnobežnou s osou y a parametrom $p > 0$ má rovnicu[4]

$$(x-m)^2 = \pm 2p(y-n). \tag{11.9}$$



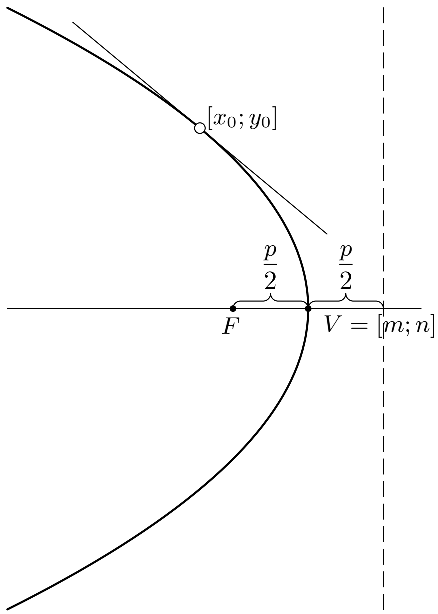
Rovnica dotyčnice v dotykovom bode $[x_0; y_0]$ je

$$(x_0-m)(x-m) = \pm p(y+y_0-2n). \tag{11.10}$$

Parabola s vrcholom $V = [m; n]$, s osou rovnobežnou s osou x a parametrom $p > 0$ má rovnicu

$$(y-n)^2 = \pm 2p(x-m). \tag{11.11}$$

[4]V rovnici (11.9) je potrebné uvažovať vždy práve jedno zo znamienok + alebo −. Rovnako treba chápať výraz $\pm p$ aj v rovniciach dotyčnice k parabole.



Rovnica dotyčnice v dotykovom bode $[x_0; y_0]$ je

$$(y_0 - n)(y - n) = \pm p(x + x_0 - 2m). \tag{11.12}$$

Parameter p paraboly je vzdialenosť ohniska od riadiacej priamky. Hodnota $\frac{p}{2}$ udáva vzdialenosť vrchola od riadiacej priamky, resp. vzdialenosť vrchola od ohniska.

---

1. Rovnica $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ je v rovine analytickým vyjadrením:

   A: elipsy B: kružnice C: hyperboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Rovnicu $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ upravíme na stredový tvar, ktorý obsahuje premenné x, y len vo výrazoch typu $(x - m)$ a $(y - n)$. Dostaneme to doplnením na úplný štvorec podľa vzťahu

$$z^2 + p \cdot z = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2, \tag{11.13}$$

kde namiesto premennej z použijeme x alebo y.

Najskôr v danej rovnici združíme členy obsahujúce premenné x a y:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) - 3 = 0$$

a na dvojčleny $x^2 - 4x$ a $y^2 + 6y$ aplikujeme vzťah (11.13). Dostaneme

$$\left[(x - 2)^2 - 4\right] + \left[(y + 3)^2 - 9\right] - 3 = 0$$

a po jednoduchých úpravách

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4^2.$$

Odtiaľ je zrejmé, že sa jedná o rovnicu kružnice (11.1) s $m=2$, $n=-3$ a $r=4$, t. j. kružnice so stredom $S=[2;-3]$ a polomerom 4. Správna je odpoveď B.

---

2. Rovnica $16x^2+25y^2-64x-50y-311=0$ je v rovine analytickým vyjadrením:

   A: kružnice B: hyperboly C: elipsy D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Rovnicu $16x^2+25y^2-64x-50y-311=0$ upravíme na stredový tvar s výrazmi typu $(x-m)$ a $(y-n)$. Využijeme úpravu (11.13) na úplný štvorec.

$$\begin{aligned}
(16x^2-64x)+(25y^2-50y)-311&=0,\\
16(x^2-4x)+25(y^2-2y)-311&=0,\\
16\left[(x-2)^2-4\right]+25\left[(y-1)^2-1\right]-311&=0,\\
16(x-2)^2-64+25(y-1)^2-25-311&=0,\\
16(x-2)^2+25(y-1)^2&=400, \quad /:400\\
\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}&=1.
\end{aligned}$$

Porovnaním poslednej rovnice s rovnicou elipsy (11.3) vidno, že $m=2$, $n=1$, $a^2=25$ a $b^2=16$. Ide teda o elipsu so stredom $S=[2;1]$, hlavnou polosou $a=5$ a vedľajšou polosou $b=4$. Správna odpoveď je C.

---

3. Rovnica $9x^2+4y^2+18x-16y+61=0$ je v rovine analytickým vyjadrením:

   A: elipsy B: kružnice C: hyperboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

Riešenie. Rovnicu podobne ako v príkladoch 1 a 2 upravíme na stredový tvar s výrazmi typu $(x-m)$ a $(y-n)$. Využijeme opäť úpravu (11.13) na úplný štvorec.

$$\begin{aligned}
(9x^2+18x)+(4y^2-16y)+61&=0,\\
9(x^2+2x)+4(y^2-4y)+61&=0,\\
9\left[(x+1)^2-1\right]+4\left[(y-2)^2-4\right]+61&=0,\\
9(x+1)^2-9+4(y-2)^2-16+61&=0,\\
9(x+1)^2+4(y-2)^2&=-36, \quad /:36\\
\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}&=-1.
\end{aligned}$$

Tejto rovnici nevyhovuje žiadny bod, lebo na jej ľavej strane vystupuje súčet dvoch nezáporných výrazov, ktorý nemôže byť rovný -1. Rovnica $9x^2+4y^2+18x-16y+61=0$ nie je rovnicou žiadnej z uvedených kužeľosečiek. Správna odpoveď je D.

---

4. Rovnica kružnice so stredom v bode $S=[-5;4]$ a polomerom $r=7$ je:

A: $x^2+5x+y^2-4y=49$ B: $x^2+y^2-10x-8y-8=0$ C: $x^2+y^2+10x-8y-8=0$
D: $2x^2+2y^2+20x-16y-11=0$

Riešenie. Rovnica kružnice so stredom $S=[m;n]$ a polomerom r má tvar

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2.$$

Dosadíme do tejto rovnice súradnice stredu $m=-5, n=4$ a polomer $r=7$. Dostaneme

$$(x+5)^2+(y-4)^2=49.$$

Umocnením výrazov v zátvorkách na ľavej strane rovnice máme

$$x^2+10x+25+y^2-8y+16=49$$

a po úprave

$$x^2+y^2+10x-8y-8=0.$$

Správna odpoveď je C.

---

5. Rovnica dotyčnice ku kružnici $(x+3)^2+(y-4)^2=100$ v bode $[3;12]$ je:

A: $3x-4y+37=0$ B: $3x+4y-57=0$ C: $3x-y+3=0$ D: $x-4y+45=0$

Riešenie. Overíme, či bod $[3;12]$ leží na kružnici. Dosadíme jeho súradnice do rovnice kružnice:

$$\begin{aligned}(3+3)^2+(12-4)^2&=100,\\ 6^2+8^2&=100,\\ 36+64&=100,\\ 100&=100.\end{aligned}$$

Keďže súradnice bodu $[3;12]$ vyhovujú rovnici kružnice, tento bod je jej dotykovým bodom.

Hľadáme dotyčnicu ku kružnici

$$(x+3)^2+(y-4)^2=100,$$

pre ktorú je $m=-3$, $n=4$ a $r^2=100$. Rovnica dotyčnice bude podľa (11.2)

$$(x_0+3)(x+3)+(y_0-4)(y-4)=100.$$

Do tejto rovnice dosadíme súradnice dotykového bodu $[3;12]$, t. j. $x_0 = 3$, $y_0 = 12$:

$$(3+3)(x+3) + (12-4)(y-4) = 100.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} 6(x+3) + 8(y-4) &= 100, \quad / : 2 \\ 3(x+3) + 4(y-4) &= 50, \\ 3x + 9 + 4y - 16 &= 50, \\ 3x + 4y - 57 &= 0. \end{aligned}$$

Teda správna je odpoveď B.

---

6. Rovnica dotyčnice k elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$ v bode $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$ je:

A: $12x+6y-25=0$ B: $3x+2y-25=0$ C: $3x-2y-1=0$ D: $6x+2y-11=0$

Riešenie. Overíme, či bod $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$ leží na elipse. Dosadíme jeho súradnice do rovnice elipsy:

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 25, \\ 9 \cdot \frac{16}{9} + 4 \cdot \frac{9}{4} &= 25, \\ 16 + 9 &= 25, \\ 25 &= 25. \end{aligned}$$

Keďže súradnice bodu $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$ vyhovujú rovnici elipsy, tento bod je jej dotykovým bodom.

Vydelením danej rovnice číslom 25 a po jednoduchej úprave získame základné analytické vyjadrenie (11.3) elipsy:

$$\frac{x^2}{\frac{25}{9}} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1.$$

Pre súradnice jej stredu platí $m = 0$, $n = 0$, pričom $a^2 = \frac{25}{9}$, $b^2 = \frac{25}{4}$.

Tieto hodnoty spolu so súradnicami dotykového bodu $x_0 = \frac{4}{3}$, $y_0 = \frac{3}{2}$ dosadíme do rovnice dotyčnice (11.4). Dostaneme

$$\frac{\frac{4}{3} \cdot x}{\frac{25}{9}} + \frac{\frac{3}{2} \cdot y}{\frac{25}{4}} = 1.$$

Po úprave oboch zložených zlomkov dostaneme

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{4}{3} \cdot x + \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{2} \cdot y = 1.$$

Po vykrátení zlomkov a vynásobení rovnice číslom 25 získame rovnicu

$$12x + 6y = 25,$$

ktorá je ekvivalentná s rovnicou

$$12x + 6y - 25 = 0.$$

Teda správna odpoveď je A.

---

7. Rovnica dotyčnice k parabole $(y-2)^2 = 12(x+1)$ v bode $[2; -4]$ je:

   A: $x + y + 2 = 0$ B: $2x - 4y = 0$ C: $2x - 4y + 1 = 0$ D: $x + y - 12 = 0$

Riešenie. Dosadením súradníc bodu $[2; -4]$ do rovnice paraboly, ľahko overíme (analogicky ako v príkladoch 5 a 6), že bod s danými súradnicami leží na parabole, a teda je jej dotykovým bodom.

Daná parabola má rovnicu tvaru (11.11) so znamienkom + s $m = -1$, $n = 2$ a $p = 6$.

Napíšeme rovnicu dotyčnice (11.12) k parabole:

$$(y_0 - 2)(y - 2) = 6(x_0 + x + 2).$$

Ak za x_0, y_0 dosadíme súradnice dotykového bodu $x_0 = 2$, $y_0 = -4$ dostaneme

$$(-4 - 2)(y - 2) = 6(2 + x + 2).$$

Po úpravách máme

$$\begin{aligned} -6(y-2) &= 24 + 6x, \quad / : 6 \\ -(y-2) &= 4 + x, \quad / + (y-2) \\ 0 &= x + y + 2. \end{aligned}$$

Správna odpoveď je A.

---

8. Sú dané body $A = [5; -3]$ a $B = [-3; 7]$. Rovnica kružnice, ktorej priemerom je úsečka AB je:

   A: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ B: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 164$ C: $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 100$
   D: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 41$

Riešenie. Na určenie rovnice kružnice v stredovom tvare potrebujeme poznať súradnice stredu $S = [m; n]$ a polomer r kružnice.

Ak $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, tak stred úsečky AB vypočítame podľa vzťahu

$$S = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right] \tag{11.14}$$

a pre dĺžku úsečky AB (vzdialenosť bodov A, B) platí

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{11.15}$$

Ak $A = [5; -3]$, $B = [-3; 7]$, tak stred úsečky AB (čo je súčasne aj stred kružnice) je

$$S = \left[\frac{5 + (-3)}{2}; \frac{-3 + 7}{2}\right] = \left[\frac{2}{2}; \frac{4}{2}\right] = [1; 2].$$

Teda $m = 1$, $n = 2$. Polomer kružnice môžeme vypočítať ako vzdialenosť bodov A, S alebo B, S. Využijeme vzťah (11.15) pre vzdialenosť dvoch bodov. Platí

$$r = |AS| = \sqrt{(m - a_1)^2 + (n - a_2)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}.$$

Hľadanú rovnicu kružnice dostaneme, ak do stredového tvaru (11.1) rovnice kružnice dosadíme súradnice jej stredu $m = 1$, $n = 2$ a polomer kružnice $r = \sqrt{41}$. Teda

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 41.$$

Z uvedeného vyplýva, že správna odpoveď je D.

---

9. Rovnica hyperboly s hlavnou polosou $a = 5$ a ohniskami $F_1 = [-6; 5]$, $F_2 = [8; 5]$ je:

   A: $\dfrac{(x-1)^2}{196} - \dfrac{(y-5)^2}{25} = 1$ B: $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-5)^2}{24} = 1$ C: $\dfrac{(x-1)^2}{25} - \dfrac{(y-5)^2}{24} = 1$
   D: $\dfrac{(x-5)^2}{24} - \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$

Riešenie. Keďže y-ové súradnice ohnísk sú rovnaké, os hyperboly je rovnobežná s osou x. Potom rovnica hyperboly so stredom $S = [m; n]$, hlavnou polosou a a vedľajšou polosou b je typu (11.5):

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Stred hyperboly je stredom úsečky F_1F_2. Jeho súradnice vypočítame analogicky ako v príklade 8 podľa vzťahu (11.14). Preto

$$S = \left[\frac{-6 + 8}{2}; \frac{5 + 5}{2}\right] = \left[\frac{2}{2}; \frac{10}{2}\right] = [1; 5].$$

Na určenie veľkosti vedľajšej polosi b použijeme vzťah pre excentricitu e (ohniskovú vzdialenosť) hyperboly. Platí

$$e^2 = a^2 + b^2 \quad \text{a} \quad |F_1F_2| = 2e,$$

kde $|F_1F_2|$ je vzdialenosť ohnísk. Podľa vzťahu (11.15) z príkladu 8 pre vzdialenosť bodov F_1, F_2 dostaneme

$$|F_1F_2| = \sqrt{(8 + 6)^2 + (5 - 5)^2} = \sqrt{14^2 + 0^2} = \sqrt{196} = 14.$$

Potom

$$e = \frac{|F_1F_2|}{2} = 7$$

a

$$b^2 = e^2 - a^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24.$$

Požadovaná rovnica hyperboly je

$$\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y-5)^2}{24} = 1.$$

Správna odpoveď je C.

---

10. Priamka $2x + 3y - 8 = 0$ a hyperbola $4x^2 - y^2 = 64$ majú:

    A: spoločný jeden bod $[4; 0]$ B: spoločný jeden bod $[1; 2]$ C: spoločné dva body
    D: nemajú spoločný žiadny bod

Riešenie. Ak hyperbola a priamka majú spoločný bod, súradnice tohto bodu musia vyhovovať rovnici hyperboly aj rovnici priamky. Preto vzájomnú polohu priamky a hyperboly určíme riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} 4x^2 - y^2 &= 64, \\ 2x + 3y - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice vyjadríme jednu premennú, napr. x:

$$x = \frac{8}{2} - \frac{3}{2}y = 4 - \frac{3}{2}y$$

a dosadíme do prvej rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned} 4\left(4 - \frac{3}{2}y\right)^2 - y^2 &= 64, \\ 4\left(16 - 12y + \frac{9}{4}y^2\right) - y^2 &= 64, \\ 64 - 48y + 9y^2 - y^2 &= 64, \\ 8y^2 - 48y &= 0, \quad / : 8 \\ y^2 - 6y &= 0. \end{aligned}$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu bez absolútneho člena. Vyriešime ju rozkladom na súčinový tvar:

$$y \cdot (y - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \vee y - 6 = 0.$$

Rovnica má dve riešenia

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 6,$$

preto priamka $2x + 3y - 8 = 0$ má s hyperbolou $4x^2 - y^2 = 64$ spoločné dva body. Správna odpoveď je C.

Poznamenajme, že dosadením $y_1 = 0$, $y_2 = 6$ do vzťahu $x = 4 - \frac{3}{2}y$ vypočítame x-ové súradnice priesečníkov P_1 a P_2 priamky a hyperboly:

$$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 - \frac{3}{2} \cdot 0 = 4, \quad y_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 4 - \frac{3}{2} \cdot 6 = -5.$$

Priesečníky sú $P_1 = [4; 0]$ a $P_2 = [-5; 6]$.

11.2 Úlohy

---

1. Rovnica $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$ je v rovine analytickým vyjadrením:

   A: kružnice B: elipsy C: hyperboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

2. Rovnica $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 24 = 0$ je v rovine analytickým vyjadrením:

   A: kružnice B: elipsy C: hyperboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

3. Rovnica $3x^2 - 4y^2 + 12x + 40y - 88 = 0$ je v rovine analytickým vyjadrením:

   A: elipsy B: hyperboly C: paraboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

4. Rovnica $2x^2 + 2y^2 - 12x + 16y + 1 = 0$ je v rovine analytickým vyjadrením:

   A: kružnice B: elipsy C: paraboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

5. Rovnica $x^2 - 4x - y + 3 = 0$ je v rovine analytickým vyjadrením:

   A: kružnice so stredom $S = [2; 0]$ B: elipsy so stredom $S = [-1; 2]$ C: paraboly s vrcholom $V = [-2; 1]$ D: paraboly s vrcholom $V = [2; -1]$

---

6. Rovnica kružnice so stredom v bode $S = [1; 2]$ a polomerom $r = 3$ je:

   A: $x^2+y^2-4x-2y-4 = 0$ B: $x^2+y^2-2x-4y-4 = 0$ C: $x^2+y^2-2x-4y+4 = 0$ D: $2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$

---

7. Rovnica kružnice so stredom v bode $S = [-2; -3]$ a polomerom $r = 5$ je:

   A: $x^2+y^2-2x-3y = 0$ B: $x^2+y^2+4x+6y-12 = 0$ C: $x^2+y^2+4x+6y-5 = 0$ D: $2x^2 + 2y^2 + 8x + 12y - 25 = 0$

8. Rovnica elipsy so stredom v bode $S = [2; -2]$ a polosami $a = 3$, $b = 2$ je:

A: $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y - 1 = 0$ B: $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$
C: $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 80 = 0$ D: $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 100 = 0$

---

9. Rovnica hyperboly s hlavnou polosou $a = 12$ a ohniskami $F_1 = [-10; 2]$, $F_2 = [16; 2]$ je:

A: $-\dfrac{(x-3)^2}{144} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$ B: $\dfrac{(x-3)^2}{144} - \dfrac{(y-2)^2}{81} = 1$ C: $\dfrac{(x-3)^2}{144} - \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$
D: $\dfrac{(x-2)^2}{144} - \dfrac{(y-3)^2}{81} = 1$

---

10. Rovnica paraboly s ohniskom $F = [4; 0]$ a riadiacou priamkou $y = 2$ je:

A: $(x-4)^2 = -4y$ B: $(x-4)^2 = -4(y-1)$ C: $(y-4)^2 = -4(x-1)$
D: $(x-4)^2 = -2(y-1)$

---

11. Rovnica dotyčnice ku kružnici $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ v bode $[6; 2]$ je:

A: $2x + 6y - 24 = 0$ B: $4x + 3y - 25 = 0$ C: $4x + 3y - 30 = 0$ D: $6x + 2y - 40 = 0$

---

12. Rovnica dotyčnice ku kružnici $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ v bode $[1; -1]$ je:

A: $y = -1$ B: $y = x - 2$ C: $y = 3x - 4$ D: $y = -x$

---

13. Rovnica dotyčnice k parabole $x^2 + 20y = 0$ v bode $[10; -5]$ je:

A: $x - y - 15 = 0$ B: $x + y - 5 = 0$ C: $2x + y - 15 = 0$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

14. Rovnica dotyčnice k parabole $(x+3)^2 = -8(y-4)$ v bode $[1; 2]$ je:

A: $x + y - 3 = 0$ B: $x + 2y - 5 = 0$ C: $2x + y - 4 = 0$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

15. Rovnica dotyčnice k hyperbole $x^2 - 2y^2 = 8$ v bode $[4; 2]$ je:

A: $x - 2y = 0$ B: $x - y - 2 = 0$ C: $x + 2y - 8 = 0$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

16. Rovnica dotyčnice k elipse $x^2 + 16y^2 = 25$ v bode $[3; 1]$ je:

A: $x + 4y - 7 = 0$ B: $x + 16y - 25 = 0$ C: $3x + y - 10 = 0$ D: $3x + 16y - 25 = 0$

17. Priamka $6x - y - 7 = 0$ a parabola $(x+1)^2 = y + 4$:

A: majú spoločné dva body $[2; 5]$, $[5; 23]$ B: majú spoločný jeden bod C: nemajú spoločný žiadny bod D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

18. Priamka $2x + y - 14 = 0$ a elipsa $4x^2 + y^2 - 100 = 0$:

A: majú spoločný jeden bod $[3; 8]$ B: nemajú spoločný žiadny bod C: majú spoločné dva body D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

19. Sú dané body $A = [3; -7]$, $B = [9; 1]$. Rovnica kružnice, ktorej priemerom je úsečka AB je:

A: $(x-3)^2+(y-4)^2 = 121$ B: $(x-6)^2+(y+3)^2 = 25$ C: $(x-6)^2+(y+3)^2 = 100$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

20. Sú dané body $A = [7; 8]$, $B = [1; 16]$. Rovnica kružnice, ktorej priemerom je úsečka AB je:

A: $(x-3)^2+(y-4)^2 = 32$ B: $(x-4)^2+(y-12)^2 = 25$ C: $(x-4)^2+(y-12)^2 = 100$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

12 Riešenie jednoduchých goniometrických rovníc

12.1 Riešené príklady

Na úvod uvedieme tabuľku základných hodnôt goniometrických funkcií:

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$*$
$\operatorname{cotg} x$	$*$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Taktiež uvedieme niekoľko základných vzťahov medzi goniometrickými funkciami, ktoré sa využívajú pri riešení úloh v tejto kapitole.

Pre všetky reálne čísla x platia nasledujúce vzťahy:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{12.1}$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \tag{12.2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \tag{12.3}$$

Pre všetky reálne čísla x, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, platí

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot \tag{12.4}$$

Pre všetky reálne čísla x, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, platí

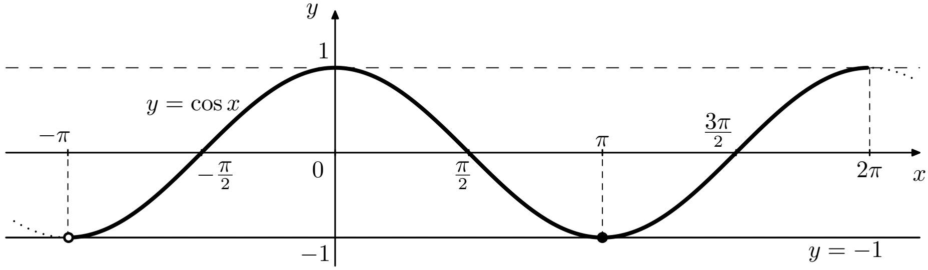
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot \tag{12.5}$$

---

1. Počet koreňov rovnice $\cos x = -1$ na intervale $(-\pi; 2\pi\rangle$ je:

   A: 1 B: 2 C: 3 D: 4

Riešenie. Načrtnime graf funkcie $y = \cos x$ na intervale $(-\pi; 2\pi\rangle$.



Z obrázku je vidieť, že čísla, ktoré by mohli byť riešením rovnice $\cos x = -1$ na intervale $(-\pi; 2\pi\rangle$, sú $-\pi$ a π. Keďže

$$-\pi \notin (-\pi; 2\pi\rangle,$$

dostávame, že riešením je jedine

$$x = \pi.$$

Správna odpoveď je A.

---

2. Počet koreňov rovnice $\sin x = -2$ na intervale $\langle 0; \pi\rangle$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

Riešenie. Obor hodnôt funkcie $f : y = \sin x$ je

$$H_f = \langle -1; 1\rangle.$$

Keďže

$$-2 \notin \langle -1; 1\rangle,$$

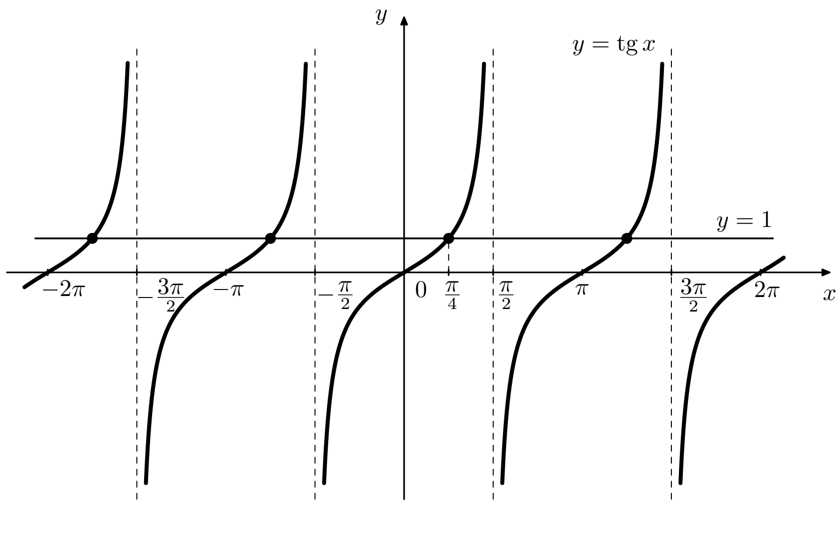
nemôže funkcia $y = \sin x$ hodnotu -2 nadobúdať. Teda rovnica $\sin x = -2$ nemá riešenie na množine reálnych čísel, a preto nemá riešenie ani na intervale $\langle 0; \pi\rangle$. Správna odpoveď je A.

---

3. Počet koreňov rovnice $\operatorname{tg} x = 1$ na intervale $\langle -2\pi; 2\pi\rangle$ je:

A: 1 B: 2 C: 3 D: 4

Riešenie. Načrtnime graf funkcie $y = \operatorname{tg} x$.



Z obrázku vidno, že rovnica $\operatorname{tg} x = 1$ má na intervale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ štyri korene. Teda správna odpoveď je D.

Ak by niekto uprednostnil radšej exaktné riešenie, ponúkame aj to. Uvažujme najprv korene danej rovnice na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Rovnica $\operatorname{tg} x = 1$ má na tomto intervale jediný koreň $x = \frac{\pi}{4}$. Keďže funkcia tangens je periodická so základnou periódou π, riešenia danej rovnice na množine reálnych čísel sú všetky čísla tvaru

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Uvážme, pre aké hodnoty k dané čísla patria do intervalu $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

Vyriešime nasledujúcu nerovnicu:

$$-2\pi \leqq \frac{\pi}{4} + k\pi \leqq 2\pi.$$

Po odpočítaní $\frac{\pi}{4}$ a vykrátení kladného čísla π dostávame:

$$-\frac{9}{4} \leqq k \leqq \frac{7}{4}.$$

Tejto nerovnici vyhovujú celočíselné $k \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Teda riešenia rovnice na intervale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ sú

$$-\frac{7\pi}{4}, \quad -\frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}.$$

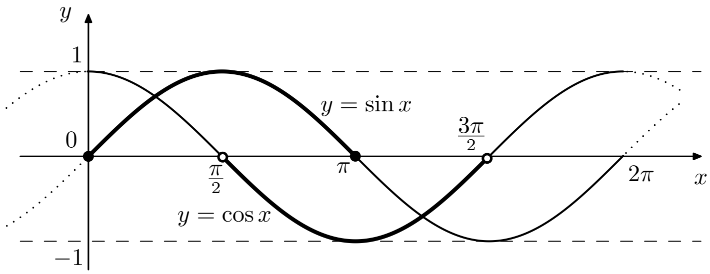
Správna odpoveď je D.

---

4. Podmienky $\sin x \geqq 0$ a $\cos x < 0$ pre $0 \leqq x \leqq 2\pi$ sú ekvivalentné s podmienkou:

A: $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ B: $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ C: $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$ D: $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Riešenie. Načrtnime grafy funkcií $y = \sin x$ a $y = \cos x$ na $\langle 0; 2\pi \rangle$.



Z obrázku vidno, že obidve podmienky sú splnené pre $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$. Správna odpoveď je C.

5. Pre $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, je výraz $\dfrac{1}{\cos 2x}$ rovný výrazu:

A: 1 B: $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ C: $\dfrac{1}{2\cos x}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie.

- Odpoveď A nie je správna, pretože x nie je konštanta.
- Odpoveď C nie je správna, pretože vo všeobecnosti $\cos 2x \neq 2\cos x$.
- Zistime, či B je správna odpoveď. Pre $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, použitím známych vzťahov (12.4), (12.1) a (12.3) medzi goniometrickými funkciami dostávame

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{1-\operatorname{tg}^2 x} \overset{(12.4)}{=} \frac{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2+1}{1-\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x} \overset{(12.1),(12.3)}{=} \frac{1}{\cos 2x}.$$

Teda B je správna odpoveď.

6. Pre $x \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ je výraz $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-1\right)$ rovný výrazu:

A: $\dfrac{1}{\cos x}$ B: $\operatorname{tg} x$ C: $\operatorname{cotg}^2 x$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

Riešenie. Pre všetky reálne čísla x platí vzťah (12.1)

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$$

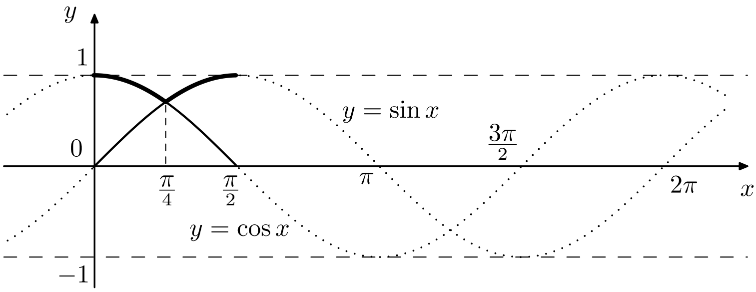
Pre $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, využijúc tiež vzťah (12.5) po úprave dostávame

$$\frac{1}{\sin^2 x}-1 = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} \overset{(12.1)}{=} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 \overset{(12.5)}{=} \operatorname{cotg}^2 x.$$

Správna odpoveď je C.

7. Podmienka $\sin x \geqq \cos x$ pre $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ je ekvivalentná s podmienkou:

A: $0 < x < \frac{\pi}{4}$ B: $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ C: $\frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{\pi}{2}$ D: $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$



Riešenie. Načrtnime grafy funkcií $y = \sin x$ a $y = \cos x$ na $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$.

Z obrázku je zrejmé, že podmienka $\sin x \geqq \cos x$ pre $x \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ je ekvivalentná s podmienkou $\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$. Priesečník grafov funkcií $y = \sin x$ a $y = \cos x$ je v bode $x = \dfrac{\pi}{4}$, pretože

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Správna odpoveď je D.

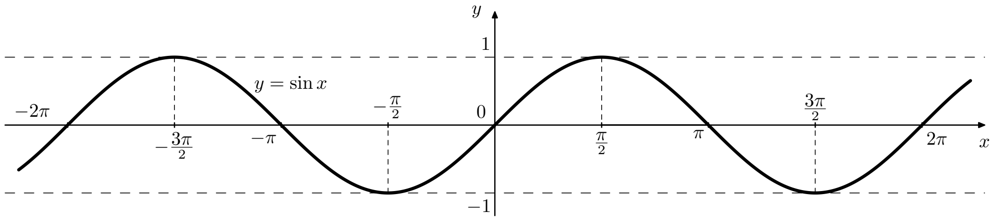
Poznamenajme, že odpoveď C nie je správna, pretože nezahŕňa riešenie $x = \dfrac{\pi}{2}$.

---

8. Rozhodnite, ktoré z uvedených tvrdení o funkcii $y = \sin x$ je pravdivé:

A: definičným oborom funkcie je množina všetkých reálnych čísel B: je párna
C: funkcia je zhora neohraničená D: funkcia je rastúca na intervale $\left\langle \dfrac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

Riešenie.



Funkcia sínus je daná predpisom $f : y = \sin x$. Základné vlastnosti funkcie sínus sú:

(1) definičný obor je $D_f = \mathbb{R}$,

(2) obor hodnôt je $H_f = \langle -1, 1 \rangle$,

(3) keďže obor hodnôt je ohraničený, funkcia sínus je ohraničená,

(4) je periodická so základnou periódou 2π,

(5) je rastúca na $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ a klesajúca na $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$,

(6) nie je prostá,

(7) je nepárna, t. j. pre všetky reálne čísla x platí: $\sin(-x) = -\sin x$,

(8) grafom je sínusoida.

Teda

- z (1) vyplýva, že tvrdenie A je pravdivé;
- z vlastnosti (7) dostávame, že B nie je pravdivé;
- z (3) dostávame, že odpoveď C nie je správna;
- z vlastnosti (5), ale najmä z grafu je zrejmé, že funkcia $y = \sin x$ je na intervale $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$ klesajúca, teda D nie je pravdivé tvrdenie.

Správna odpoveď je A.

12.2 Úlohy

---

1. Počet koreňov rovnice $\cos x = 0$ na intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$ je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

---

2. Počet koreňov rovnice $\sin x = 1$ na intervale $(0; 4\pi\rangle$ je:

   A: 1 B: 2 C: 3 D: 4

---

3. Počet koreňov rovnice $\cos x = 0{,}4$ na intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$ je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

---

4. Počet koreňov rovnice $\cos x = 1$ na intervale $(0; 2\pi\rangle$ je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

---

5. Počet koreňov rovnice $\cos x = -1$ na intervale $\langle -\pi; \pi \rangle$ je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

---

6. Počet koreňov rovnice $\cos x = 2$ na intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$ je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

7. Počet koreňov rovnice $\operatorname{cotg} x = 1$ na intervale $\langle 0; 2\pi\rangle$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

8. Počet koreňov rovnice $\operatorname{cotg} x = 0$ na intervale $\langle -\pi; \pi)$ je:

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

9. Podmienky $\sin x > 0$ a $\cos x > 0$ pre $0 \leqq x \leqq 2\pi$ sú ekvivalentné s podmienkou:

A: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$ B: $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ C: $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ D: $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

10. Podmienky $\sin x \leqq 0$ a $\cos x > 0$ pre $0 \leqq x \leqq 2\pi$ sú ekvivalentné s podmienkou:

A: $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ B: $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ C: $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ D: $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$

11. Podmienky $\sin x \leqq 0$ a $\cos x \leqq 0$ pre $0 \leqq x \leqq 2\pi$ sú ekvivalentné s podmienkou:

A: $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ B: $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ C: $x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ D: $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

12. Pre $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, je výraz $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$ rovný výrazu:

A: 1 B: $\dfrac{2}{\sin 2x}$ C: $2\operatorname{tg} x$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

13. Pre $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, je výraz $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right)$ rovný výrazu:

A: 1 B: $\operatorname{cotg}^2 x$ C: $\sin^2 x$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

14. Pre $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, je výraz $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$ rovný výrazu:

A: $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ B: $\operatorname{tg}^2 x$ C: $\operatorname{cotg}^2 x$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

15. Pre $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je výraz $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{cotg}^2 x\right)$ rovný výrazu:

A: 1 B: $\operatorname{tg}^2 x$ C: $\cos^2 x$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

16. Výraz $\left(\cos^2 x - \cos 2x\right)$ je rovný výrazu:

A: $\cos x$ B: $\sin x$ C: $\sin^2 x$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

17. Podmienka $\sin x > \cos x$ pre $x \in (0; \pi)$ je ekvivalentná s podmienkou:

A: $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ B: $\dfrac{\pi}{4} < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ C: $\dfrac{\pi}{4} < x < \pi$ D: $\dfrac{\pi}{2} \leqq x < \pi$

18. Podmienka $\sin x \leqq \cos x$ pre $x \in \langle 0; \pi)$ je ekvivalentná s podmienkou:

A: $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ B: $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ C: $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ D: $\dfrac{\pi}{4} < x < \pi$

19. Rozhodnite, ktoré z uvedených tvrdení o funkcii $y = \cos x$ nie je pravdivé:

A: je ohraničená B: je periodická C: je nepárna D: je rastúca na intervale $\left\langle -\dfrac{\pi}{2}; 0 \right\rangle$

20. Rozhodnite, ktoré z uvedených tvrdení o funkcii $y = \operatorname{tg} x$ je pravdivé:

A: je ohraničená zdola B: nie je periodická C: je párna D: je rastúca na intervale $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right)$

13 Aritmetické a geometrické postupnosti

13.1 Riešené príklady

1. Pre členy aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platia rovnice $a_4+a_5 = 7$ a $2a_4-a_2 = 8$. Prvý člen a_1 tejto postupnosti je:

   A: 8 B: 7 C: 3 D: -7

Riešenie. Základné charakteristiky aritmetickej postupnosti sú jej prvý člen a_1 a diferencia d. Je známe, že pre n-tý člen a_n aritmetickej postupnosti platí vzťah

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Pomocou neho môžeme vyjadriť členy postupnosti, ktoré vystupujú v daných rovniciach:

$$a_4 = a_1 + 3d, \qquad a_5 = a_1 + 4d \qquad \text{a} \qquad a_2 = a_1 + d.$$

Takto rovnice z textu úlohy nadobudnú tvar

$$\begin{aligned}(a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) &= 7,\\ 2(a_1 + 3d) - (a_1 + d) &= 8\end{aligned}$$

a po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned}2a_1 + 7d &= 7,\\ a_1 + 5d &= 8.\end{aligned}$$

Túto sústavu rovníc vyriešime napríklad dosadzovacou metódou: z druhej rovnice je

$$a_1 = 8 - 5d.$$

Po dosadení do prvej rovnice dostaneme

$$2(8 - 5d) + 7d = 7,$$

a teda $-3d = -9$ a odtiaľ $d = 3$. Potom $a_1 = 8 - 5 \cdot 3 = -7$. Správna odpoveď je D.

2. Korene rovnice $x^2-x-6 = 0$ tvoria prvé dva členy rastúcej aritmetickej postupnosti. Jedenásty člen tejto postupnosti je:

   A: 43 B: 48 C: 38 D: 11

Riešenie. Najprv vypočítame korene danej kvadratickej rovnice $x^2 - x - 6 = 0$. Dostaneme ich zo vzťahu (8.1) na strane 63, kde $a = 1$, $b = -1$ a $c = -6$. Potom $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$ a

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}\,.$$

Teda $x_1 = 3$ a $x_2 = -2$. Čísla 3 a -2 majú tvoriť prvé dva členy rastúcej postupnosti, čo znamená, že $a_1 = -2$ a $a_2 = 3$. Potom diferencia postupnosti je

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-2) = 5.$$

Pre n-tý člen a_n aritmetickej postupnosti platí vzťah

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \tag{13.1}$$

kde a_1 je jej prvý člen a d je jej diferencia. Odtaľ pre $n = 11$ je $a_{11} = -2 + (11-1) \cdot 5 = 48$. Správna je odpoveď B.

---

3. Nech a je ľubovoľné reálne číslo a $\dfrac{a+n}{2}$ je n-tý člen aritmetickej postupnosti. Potom jej diferencia je:

   A: 1 B: $\dfrac{1}{2}$ C: 2 D: 3

Riešenie. Z textu príkladu vidno, že n-tý člen a_n skúmanej postupnosti je daný predpisom

$$a_n = \frac{a+n}{2}.$$

Pri aritmetickej postupnosti platí, že ak k jej ľubovoľnému členu pripočítame jej diferenciu d, tak dostaneme bezprostredne nasledujúci člen postupnosti, t. j.

$$a_n + d = a_{n+1}.$$

Odtiaľ je

$$d = a_{n+1} - a_n,$$

čo v našom prípade dáva

$$d = \frac{a + (n+1)}{2} - \frac{a+n}{2} = \frac{1}{2}.$$

Správna je odpoveď B.

---

4. Súčet všetkých prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné tromi a sú menšie ako 1 000 je:

   A: 166 833 B: 16 833 C: 333 666 D: 168 633

Riešenie. Prirodzené čísla, ktoré sú deliteľné tromi a sú menšie ako 1 000 tvoria množinu

$$\{3, 6, 9, \ldots, 996, 999\}.$$

Je to aritmetická postupnosť s diferenciou $d = 3$, ktorej prvý člen je $a_1 = 3$ a posledný člen je 999. Ľahko vidieť, že počet členov tejto postupnosti je

$$n = \frac{999}{3} = 333.$$

Tu sme mohli použiť aj vzťah (13.1), podľa ktorého je

$$999 = 3 + (n-1)\cdot 3,$$

a teda $n = 333$.

Pre súčet $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ prvých n členov aritmetickej postupnosti platí

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right).$$

Stačí si uvedomiť, že v našom prípade je $a_n = a_{333} = 999$. Takto

$$s_{333} = \frac{333}{2}\left(3 + 999\right) = 166\,833,$$

a preto správna odpoveď je A.

---

5. Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti je $s_n = 5n^2 - 3n$. Ôsmy člen tejto postupnosti je:

   A: 10 B: 86 C: 296 D: 72

Riešenie. Pre $n = 1$ máme $s_1 = 5\cdot 1^2 - 3\cdot 1 = 2$, ale aj $s_1 = a_1$. To znamená, že $a_1 = 2$. Pre $n = 2$ je $s_2 = 5\cdot 2^2 - 3\cdot 2 = 14$ a taktiež $s_2 = a_1 + a_2$. Teda $14 = a_1 + a_2$ a keďže $a_1 = 2$, tak $a_2 = 12$.

Pre diferenciu tejto postupnosti dostávame

$$d = a_2 - a_1 = 12 - 2 = 10.$$

Keďže pre n-tý člen aritmetickej postupnosti platí $a_n = a_1 + (n-1)d$, tak pre požadovaný ôsmy člen postupnosti je $n = 8$ a

$$a_8 = a_1 + 7d = 2 + 7\cdot 10 = 72.$$

Správna odpoveď je D.

---

6. Druhý člen geometrickej postupnosti je a, $(a \neq 0)$ a jej piaty člen je b, kde a, b sú reálne čísla. Jedenásty člen tejto postupnosti je:

   A: $\dfrac{b^2}{a^2}$ B: $\dfrac{b^3}{a^2}$ C: $\dfrac{b^2}{a^3}$ D: $\dfrac{b^3}{a^3}$

Riešenie. Nech a_n je n-tý člen geometrickej postupnosti. Z textu príkladu vyplýva, že $a_2 = a$ a $a_5 = b$. Je známe, že medzi s-tým a r-tým členom geometrickej postupnosti platí vzťah

$$a_s = a_r q^{s-r}, \tag{13.2}$$

kde q je kvocient tejto postupnosti. Ak tu položíme $s = 5$ a $r = 2$, tak dostaneme $a_5 = a_2 q^{5-2}$, t. j. $b = aq^3$. Potom

$$q = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,. \tag{13.3}$$

Podľa (13.2) môžeme jedenásty člen určiť napr. z piateho člena takto (teraz je $s = 11$ a $r = 5$): $a_{11} = a_5 q^{11-5} = bq^6$. Potom vzhľadom na (13.3) je

$$a_{11} = b\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^6 = b\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^6 = b\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^3}{a^2}\,.$$

Preto správna je odpoveď B.

---

7. Pre členy geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platia rovnice $a_3 - a_1 = 9$ a $a_2 + a_3 = 6$. Kvocient q tejto postupnosti je:

   A: 3 B: -1 C: 2 D: -2

Riešenie. Základné charakteristiky geometrickej postupnosti sú jej prvý člen a_1 a kvocient q. Je známe, že pre n-tý člen a_n danej postupnosti platí vzťah $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Pomocou neho môžeme vyjadriť tie členy postupnosti, ktoré vystupujú v daných rovniciach:

$$a_3 = a_1 q^2 \qquad \text{a} \qquad a_2 = a_1 q.$$

Požadované rovnice nadobudnú tvar

$$\begin{aligned} a_1 q^2 - a_1 &= 9, \\ a_1 q + a_1 q^2 &= 6 \end{aligned}$$

a po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned} a_1(q^2 - 1) &= 9, \\ a_1(1 + q)q &= 6. \end{aligned}$$

Podiel ľavých strán týchto rovníc sa rovná podielu ich pravých strán, t. j.

$$\frac{a_1(q^2 - 1)}{a_1(1 + q)q} = \frac{9}{6}\,.$$

Keďže $q^2 - 1 = (q - 1)(q + 1)$, tak po krátení zlomkov na oboch stranách tejto rovnice dostaneme

$$\frac{q - 1}{q} = \frac{3}{2}\,.$$

Potom $2q - 2 = 3q$, a teda $q = -2$. Správna odpoveď je D.

8. Ak k číslam $2; 7; 17$ pripočítame to isté reálne číslo, dostaneme prvé tri členy geometrickej postupnosti. Pripočítali sme číslo:

A: 8 B: 3 C: -2 D: -1

Riešenie. Nech x je číslo, ktoré treba pripočítať k daným číslam $2; 7; 17$, aby vznikli prvé tri členy $a_1; a_2; a_3$ geometrickej postupnosti. Potom platí

$$a_1 = 2 + x, \qquad a_2 = 7 + x \qquad \text{a} \qquad a_3 = 17 + x.$$

Je známe, že ak q je kvocient geometrickej postupnosti, tak pre členy tejto postupnosti platí rovnosť

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Takto pre $n = 2$ a pre $n = 3$ je

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \qquad \text{ale aj} \qquad \frac{a_3}{a_2} = q.$$

Odtiaľ ľahko vidno, že

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}\,,$$

čo v našom prípade znamená, že

$$\frac{7+x}{2+x} = \frac{17+x}{7+x}\,.$$

Ak vznásobíme obe strany tejto rovnice výrazom $(2+x)(7+x)$, tak dostaneme rocnicu

$$(7 + x)(7 + x) = (17 + x)(2 + x),$$

ktorú vyriešime týmito jednoduchými úpravami:

$$49 + 14x + x^2 = 34 + 19x + x^2,$$
$$15 = 5x,$$
$$x = 3.$$

Správna je odpoveď B.

9. Prvý člen geometrickej postupnosti je 6 a jej štvrtý člen je -48. Súčet prvých ôsmich členov tejto postupnosti je:

   A: -255 B: -1020 C: -510 D: -192

Riešenie. Základné charakteristiky geometrickej postupnosti sú jej prvý člen a_1 a kvocient q. Prvý člen postupnosti je 6. Kvocient získame zo vzťahu

$$a_4 = a_1 \cdot q^3,$$

čo je špeciálny prípad vzorca $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ pre $n = 4$. Takto

$$-48 = 6 \cdot q^3,$$

a teda $q^3 = -8$. Odtiaľ dostávame $q = -2$.

Pre súčet s_n prvých n členov geometrickej postupnosti platí:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{kde } q \neq 1. \tag{13.4}$$

Našou úlohou je určiť súčet s_8 prvých ôsmich členov tejto postupnosti. K tomu stačí vo (13.4) zvoliť $n = 8$:

$$s_8 = 6 \cdot \frac{1-(-2)^8}{1+2} = 6 \cdot \frac{1-256}{3} = -510.$$

Správna odpoveď je C.

13.2 Úlohy

---

1. Tretí člen aritmetickej postupnosti je 28 a jej ôsmy člen je 3. Dvanásty člen tejto postupnosti je:

   A: -22 B: -12 C: 12 D: -17

---

2. Pre členy aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_2 + a_3 = 34$ a $3a_2 - a_4 = 4$. Diferencia tejto postupnosti je:

   A: 4 B: 10 C: 2 D: 5

---

3. Pre členy aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 + a_7 = 22$ a $a_1 \cdot a_4 = 22$. Prvý člen tejto postupnosti je:

   A: 11 B: 1 C: 2 D: -3

---

4. Medzi čísla 2 a 162 vložíme tri čísla tak, že spolu s danými číslami tvoria prvých päť členov aritmetickej postupnosti. Vložili sme čísla:

   A: 4; 8; 16 B: 6; 18; 54 C: 42; 82; 122 D: 10; 50; 250

---

5. Ak $3n - 5$ je n-tý člen aritmetickej postupnosti, tak súčet prvých piatich členov tejto postupnosti je:

   A: 20 B: -10 C: 30 D: 25

---

6. Tretí člen aritmetickej postupnosti je -4 a jej siedmy člen je 2. Súčet prvých dvanástich členov tejto postupnosti je:

   A: 5 B: 3 C: 15 D: 9,5

---

7. Korene rovnice $x^2 - 7x + 10 = 0$ tvoria prvé dva členy klesajúcej aritmetickej postupnosti. Diferencia tejto postupnosti je:

   A: -5 B: -3 C: -2 D: -1

---

8. Jedenásty člen aritmetickej postupnosti je 3 a jej diferencia je 2. Súčet prvých dvadsiatich členov tejto postupnosti je:

   A: 20 B: 40 C: 21 D: 12

---

9. Súčet všetkých prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné deviatimi a sú menšie ako 100 je:

   A: 694 B: 385 C: 495 D: 594

---

10. Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti je $s_n = n^2 + 3n$. Piaty člen tejto postupnosti je:

    A: 80 B: 24 C: 12 D: 40

---

11. Pre členy aritmetickej postupnosti platí $a_1 = 0$, $a_n = 5$ a $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 10$. Diferencia tejto postupnosti je:

    A: $\frac{2}{3}$ B: $\frac{5}{3}$ C: $\frac{1}{2}$ D: $\frac{4}{3}$

---

12. Prvé dva členy klesajúcej geometrickej postupnosti sú z množiny $\{12; 24\}$. Prvých päť členov tejto postupnosti je:

    A: 24; 12; 6; 3; 1 B: 12; 24; 36; 48; 60 C: 24; 12; 6; 3; 1,5 D: 24; 12; 0; -12; -24

---

13. Ak n-tý člen geometrickej postupnosti je daný predpisom $a_n = 3^{n-2}$, tak súčet jej prvých štyroch členov je:

A: $\frac{13}{3}$ B: $\frac{40}{3}$ C: $\frac{1}{3}$ D: 12

---

14. Ak n-tý člen geometrickej postupnosti je daný predpisom $a_n = 2^{2-n}$, tak jej kvocient je:

A: $\frac{1}{2}$ B: 2 C: -2 D: $-\frac{1}{2}$

---

15. Pre členy geometrickej postupnosti platí $a_3 = -2$ a $a_6 = 16$. Desiaty člen tejto postupnosti je:

A: -32 B: 32 C: -128 D: 256

---

16. Kvocient geometrickej postupnosti je $\sqrt{2}$ a pre jej členy platí $a_1 = 1$ a $a_n = 32$. Potom n sa rovná:

A: 9 B: 15 C: 11 D: 7

---

17. Členy geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú rovniciam $a_2 - a_1 = 15$ a $a_3 - a_2 = 60$. Prvý člen tejto postupnosti je:

A: 5 B: 4 C: 20 D: 80

---

18. Ak k číslam 1; 13; 49 pripočítame to isté číslo x, dostaneme tri po sebe idúce členy geometrickej postupnosti. Číslo x je:

A: 2 B: 5 C: 4 D: 10

---

19. Druhý člen rastúcej geometrickej postupnosti je 6 a jej štvrtý člen je 54. Kvocient tejto postupnosti je:

A: -2 B: 4 C: 3 D: 2

---

20. Medzi čísla 2 a 162 sme vložili tri čísla tak, že spolu s danými číslami tvoria prvých päť členov rastúcej geometrickej postupnosti. Vložili sme čísla:

A: 4; 8; 16 B: 6; 18; 54 C: 8; 32; 128 D: 10; 50; 250

---

21. Súčet prvých n členov geometrickej postupnosti je $s_n = 3(2^n - 1)$. Piaty člen tejto postupnosti je:

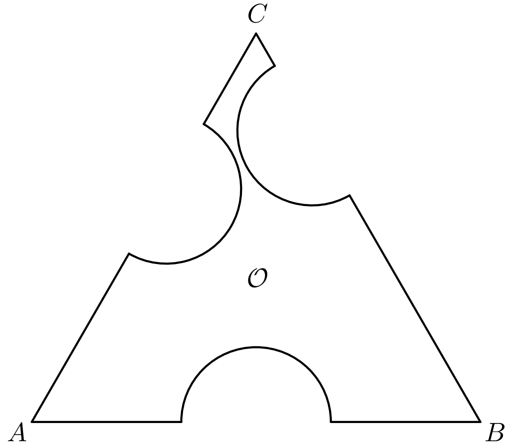
A: 96 B: 24 C: 48 D: 93

14 Riešenie základných úloh geometrie n-uholníkov

14.1 Riešené príklady

---

1. Na obrázku je znázornená oblasť $\mathcal{O}$, ktorá vznikne z rovnostranného trojuholníka ABC s dĺžkou strany a cm vyrezaním troch polkruhových výrezov, každý s priemerom $d = \dfrac{a}{3}$ cm. Obvod oblasti $\mathcal{O}$ je (v cm) rovný:



A: $a\left(3+\dfrac{\pi}{2}\right)$ B: $a\left(3+\dfrac{\pi}{3}\right)$ C: $a\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)$ D: $a\left(2+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Riešenie. Je zrejmé, že obvod oblasti $\mathcal{O}$ určíme, ak spočítame dĺžku „rovných“ častí hranice, ktorá je na každej strane trojuholníka rovná

$$a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3} \text{ [cm]}$$

s dĺžkou troch polkružníc s polomerom

$$r = \frac{d}{2} = \frac{a}{6} \text{ [cm]}$$

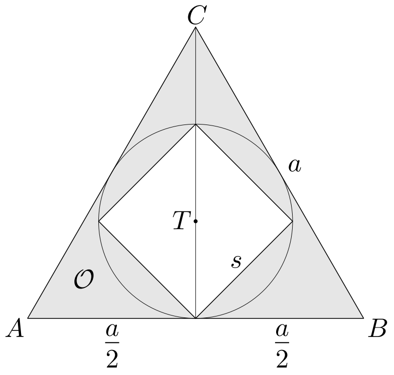
(obvod celej kružnice je rovný $2\pi r$). Teda obvod O oblasti $\mathcal{O}$ je

$$O = 3 \cdot \frac{2a}{3} + 3 \cdot \pi\,\frac{a}{6} = a\left(2+\frac{\pi}{2}\right) \text{ [cm]}.$$

Správna odpoveď je C.

2. Na obrázku je znázornená oblasť $\mathcal{O}$, ktorá vznikla z rovnostranného trojuholníka ABC s dĺžkou strany a vyrezaním štvorca vpísaného do vpísanej kružnice ABC. Obsah oblasti $\mathcal{O}$ je rovný:

A: $\dfrac{a^2}{6}\left(\sqrt{3}-1\right)$ B: $\dfrac{a^2}{12}\left(3\sqrt{3}-2\right)$ C: $\dfrac{a^2}{6}\left(2\sqrt{3}-1\right)$ D: $\dfrac{a^2}{12}\left(5\sqrt{3}-2\right)$



Riešenie. Je zrejmé, že od obsahu trojuholníka ABC je potrebné odpočítať obsah štvorca. Najprv určíme veľkosť jeho strany. Začneme výpočtom veľkosti polomeru vpísanej kružnice. Je zrejmé, že stred vpísanej kružnice rovnostranného trojuholníka je presne v ťažisku, a preto je polomer r_v vpísanej kružnice rovný tretine dĺžky ťažnice, ktorá je v tomto prípade zároveň výškou rovnostranného trojuholníka. Keďže výška tvorí odvesnu pravouhlého trojuholníka s veľkosťou prepony a a s dĺžkou druhej odvesny rovnou $\frac{a}{2}$, použijeme na jej výpočet Pytagorovu vetu:

$$v=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{4a^2-a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3a^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,a. \tag{14.1}$$

Polomer vpísanej kružnice je teda

$$r_v=\frac{1}{3}\cdot v=\frac{\sqrt{3}}{6}\,a.$$

Na určenie veľkosti s strany štvorca využijeme znova Pytagorovu vetu pre trojuholník tvoriaci štvrtinu štvorca s odvesnami dĺžky r_v a s preponou veľkosti s:

$$s=\sqrt{r_v^2+r_v^2}=\sqrt{2}\cdot r_v=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\,a=\frac{\sqrt{6}}{6}\,a.$$

Ďalej s využitím (14.1) určíme obsah S_Δ rovnostranného trojuholníka ako

$$S_\Delta=\frac{a\cdot v}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2. \tag{14.2}$$

Obsah štvorca $S_\square$ je

$$S_\square=s^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\,a\right)^2=\frac{6}{36}\,a^2=\frac{a^2}{6}.$$

Hľadaný obsah oblasti $\mathcal{O}$ je teda:

$$S = S_\triangle - S_\square = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} - \frac{a^2}{6} = \left(3\sqrt{3} - 2\right) \cdot \frac{a^2}{12}.$$

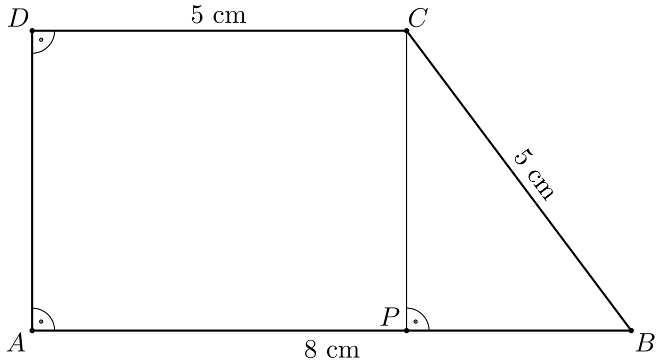
Správna je odpoveď B.

---

3. Obvod pravouhlého lichobežníka $ABCD$ s pravými uhlami pri vrcholoch A a D, so stranami dlhými $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 5$ cm a $|CD| = 5$ cm je (v cm) rovný:

   A: 20 B: 21 C: 22 D: 23

Riešenie. Načrtneme obrázok a vyznačíme do neho zadané údaje a pomocné informácie.



Ak spustíme z vrcholu C kolmicu na stranu AB a určíme jej pätu P, tak vznikne pravouhlý trojuholník CPB. Jeho prepona má dĺžku 5 cm a odvesna má dĺžku $8-5 = 3$ cm. Preto je jeho druhá odvesna na základe Pytagorovej vety dlhá

$$|PC| = |DA| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ [cm]}.$$

Obvod lichobežníka je

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 8 + 5 + 5 + 4 = 22 \text{ [cm]}.$$

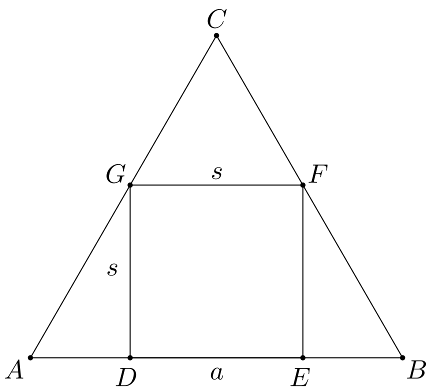
Správna odpoveď je C.

---

4. Do rovnostranného trojuholníka ABC s veľkosťou strany a je vpísaný štvorec $DEFG$ tak, že jeho strana DE leží na strane trojuholníka AB. Obvod štvorca $DEFG$ sa rovná:

   A: $4\left(2\sqrt{3} - 3\right)a$ B: $8\left(\sqrt{2} - 1\right)a$ C: $12\left(\sqrt{3} - 1\right)a$ D: $4\left(3\sqrt{2} - 2\right)a$

Riešenie. Najprv načrtneme rovnostranný trojuholník s veľkosťou strany $|AB| = a$ a s vpísaným štvorcom, pričom veľkosť strany štvorca označíme s.



Veľkosť strany štvorca s určíme využitím podobnosti trojuhulníkov ABC a GFC (overte, že trojuholníky sú podobné). Zostavíme pomer veľkostí základní a výšok týchto rovnostranných trojuholníkov, pričom na výpočet výšky rovnostranného trojuholníka použijeme vyššie odvodený vzťah (14.1):

$$v_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a, \qquad v_{\Delta GFC} = v_{\Delta ABC} - s = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a - s,$$

$$\frac{s}{a} = \frac{v_{\Delta GFC}}{v_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,a - s}{\frac{\sqrt{3}}{2}\,a}$$

a po vynásobení výrazom $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a$ máme

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,s = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a - s$$

a po prenesení s na ľavú stranu bude

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2}\,s = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a.$$

Po prenásobení rovnosti výrazom $\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$ dostávame

$$s = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\,a\,.$$

Na záver odstránime odmocniny v menovateli výrazu rozšírením zlomku jednotkou pomocou „združeného“ výrazu a následnými úpravami menovateľa:

$$s = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\,a = \frac{\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3}\,a = \left(2\sqrt{3}-3\right)a.$$

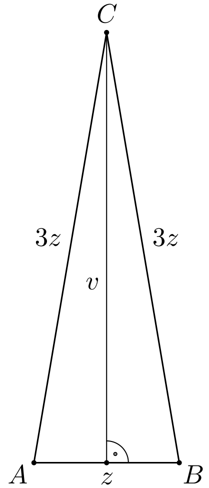
Obvod štvorca $DEFG$ sa rovná

$$O = 4 \cdot s = 4\left(2\sqrt{3}-3\right)a.$$

Správna odpoveď je A.

5. Ramená rovnoramenného trojuholníka so základňou dlhou z majú v porovnaní so základňou trojnásobnú veľkosť. Obsah trojuholníka sa rovná:

A: $\dfrac{\sqrt{32}}{4}\,z^2$ B: $\dfrac{\sqrt{33}}{4}\,z^2$ C: $\dfrac{\sqrt{34}}{4}\,z^2$ D: $\dfrac{\sqrt{35}}{4}\,z^2$



Riešenie. Načrtneme obrázok a vyznačíme údaje zo zadania spolu s pomocnými informáciami. Pri riešení využime Pytagorovu vetu podobne ako v príklade 2, tentoraz pre pravouhlý trojuholník tvorený polovicou základne o dĺžke $\dfrac{z}{2}$ ako odvesnou, ramenom dlhým $3z$ ako preponou a výškou s veľkosťou v ako druhou odvesnou (porovnajte úpravy s úpravami v (14.1)):

$$v = \sqrt{(3z)^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(9 - \frac{1}{4}\right) z^2} = \sqrt{\frac{36-1}{4}}\, z = \frac{\sqrt{35}}{2}\, z.$$

Teda pre obsah S trojuholníka ABC dostávame

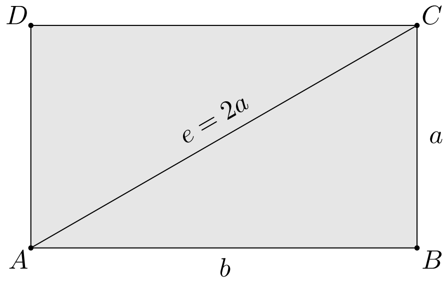
$$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v = \frac{1}{2}\, z \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}\, z = \frac{\sqrt{35}}{4}\, z^2.$$

Správna odpoveď je D.

6. Veľkosť uhlopriečky obdĺžnika $ABCD$ je dvojnásobkom veľkosti jednej z jeho strán, ktorá je a. Obsah obdĺžnika $ABCD$ sa rovná:

A: $\sqrt{2}\,a^2$ B: $\sqrt{3}\,a^2$ C: $2\,a^2$ D: $\sqrt{5}\,a^2$

Riešenie. Najprv načrtneme obdĺžnik a vyznačíme veľkosti jeho strán a uhlopriečky.



Uhlopriečka obdĺžnika spolu s jeho stranami tvoria pravouhlý trojuholník s uhlopriečkou ako preponou. Veľkosť b druhej strany obdĺžnika určíme na základe Pytagorovej vety:

$$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\, a,$$

a teda obsah obdĺžnika je:

$$S = a \cdot b = a \cdot \sqrt{3}\, a = \sqrt{3}\, a^2.$$

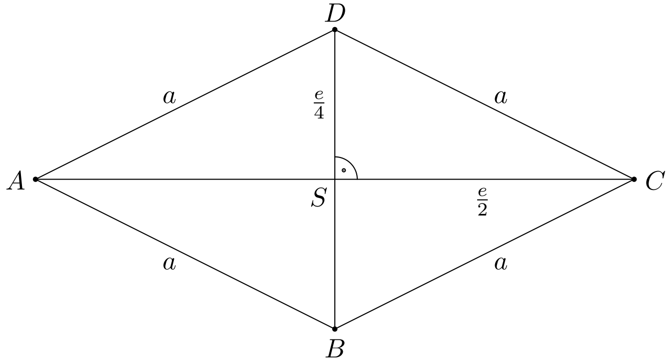
Správna je odpoveď B.

---

7. Kosoštvorec $ABCD$ má jednu uhlopriečku dĺžky e. Druhá uhlopriečka je dvakrát kratšia. Obvod kosoštvorca $ABCD$ sa rovná:

   A: $2\,e$ B: $\sqrt{5}\,e$ C: $\sqrt{6}\,e$ D: $\sqrt{7}\,e$

Riešenie. Najprv načrtneme kosoštvorec so stranou dĺžky a, do náčrtu vyznačíme zadané údaje. Veľkosť dlhšej uhlopriečky je $|AC| = e$, a preto je jej polovica rovná $|SC| = \dfrac{e}{2}$, pričom S je stred uhlopriečky. Polovica druhej uhlopriečky má teda dĺžku $|SD| = \dfrac{e}{4}$.



Základnými vlastnosťami kosoštvorca sú okrem rovnosti veľkostí jeho strán aj tie, že jeho uhlopriečky sú navzájom kolmé a rozpoľujú sa. Preto polovice uhlopriečok spolu so stranou kosoštvorca vytvárajú pravouhlý trojuholník s preponou rovnou veľkosti a strany kosoštvorca. Preto veľkosť strany a vypočítame na základe Pytagorovej vety:

$$a = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{e^2}{4} + \frac{e^2}{16}} = \sqrt{\frac{4e^2 + e^2}{16}} = \sqrt{\frac{5e^2}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}\, e,$$

a teda obvod kosoštvorca je v tomto prípade

$$O = 4a = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}\, e}{4} = \sqrt{5}\, e.$$

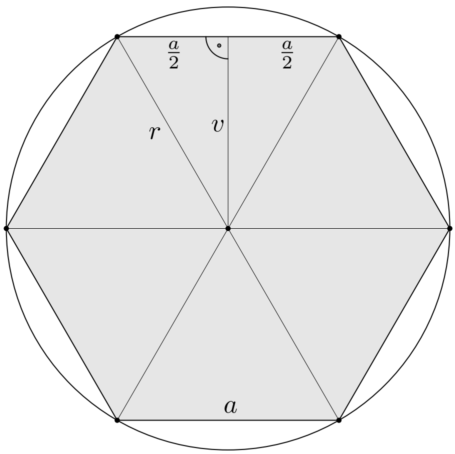
Správna je odpoveď B.

---

8. Pravidelný šesťuholník je vpísaný do kružnice s polomerom r. Obsah šesťuholníka sa rovná:

   A: $\sqrt{2}\, r^2$ B: $\sqrt{3}\, r^2$ C: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\, r^2$ D: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\, r^2$

Riešenie. Najprv načrtneme kružnicu a do nej vpísaný pravidelný šesťuholník. Vyznačíme polomer, dĺžku strany šesťuholníka označíme a.



Šesťuholník rozdelíme na šesť trojuholníkov tak, že spojíme vrcholy šesťuholníka so stredom kružnice. Šesťuholník je pravidelný, a preto je vnútorný uhol pri strede kružnice každého z trojuholníkov rovný $\dfrac{360°}{6} = 60°$. Keďže všetky trojuholníky sú zároveň rovnoramenné s dĺžkami ramien rovnými polomeru a so základňami totožnými so stranami šesťuholníka, všetky trojuholníky sú rovnostranné, pretože majú všetky uhly rovné $60°$. Teda veľkosť strany a pravidelného šesťuholníka vpísaného do kružnice s polomerom r je rovná

$$a = r.$$

Hľadaný obsah šesťuholníka vypočítame ako šesťnásobok obsahu uvažovaného rovnostranného trojuholníka. Mohli by sme najprv podľa Pytagorovej vety určiť výšku trojuholníka, túto úlohu sme však už riešili v príklade 2. My použijeme priamo vzťah (14.2) na výpočet obsahu rovnostranného trojuholníka. Teda obsah S šesťuholníka sa rovná

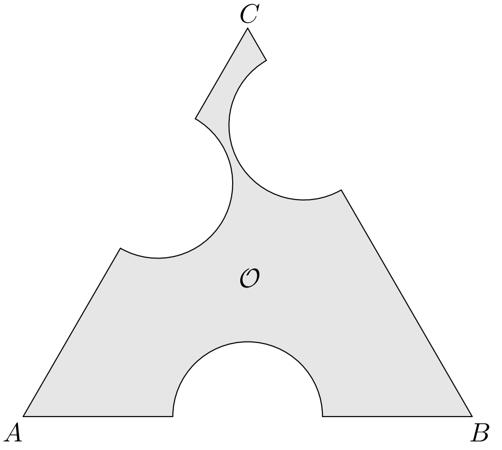
$$S = 6 \cdot S_\Delta = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, r^2.$$

Správna odpoveď je D.

14.2 Úlohy

---

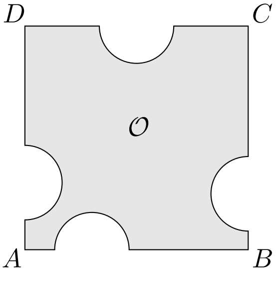
1. Na obrázku je znázornená oblasť $\mathcal{O}$, ktorá vznikne z rovnostranného trojuholníka ABC so stranou dĺžky 6 cm vyrezaním troch polkruhových výrezov, každý s priemerom 2 cm. Plošný obsah oblasti $\mathcal{O}$ je (v cm^2) rovný:



A: $\frac{2}{3}\left(6\sqrt{3} - \pi\right)$ B: $\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$ C: $\frac{3}{2}\left(6\sqrt{3} - \pi\right)$ D: $\frac{3}{2}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$

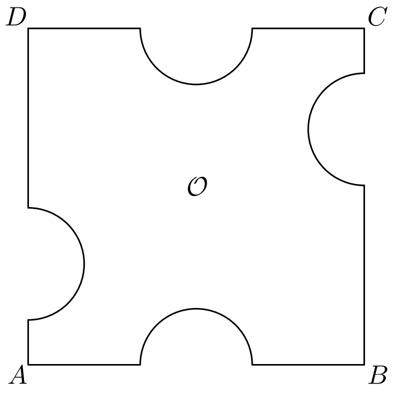
---

2. Na obrázku je znázornená oblasť $\mathcal{O}$, ktorá vznikne zo štvorca $ABCD$ so stranou dĺžky 3 cm vyrezaním štyroch polkruhových výrezov, každý s priemerom 1 cm. Plošný obsah oblasti $\mathcal{O}$ je (v cm^2) rovný:



A: $\frac{1}{2}(16 - \pi)$ B: $\frac{1}{2}(18 - \pi)$ C: $\frac{1}{2}(16 + \pi)$ D: $\frac{1}{2}(18 + \pi)$

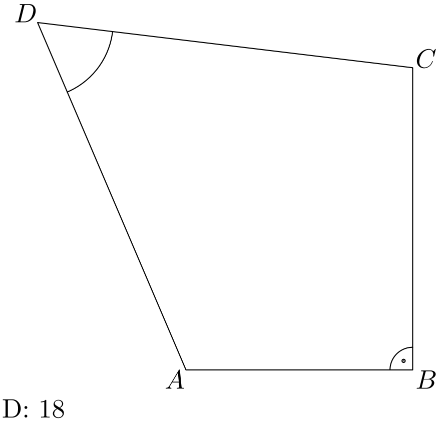
3. Na obrázku je znázornená oblasť $\mathcal{O}$, ktorá vznikne zo štvorca $ABCD$ so stranou dĺžky $a = 12$ cm vyrezaním štyroch polkruhových výrezov, každý s priemerom 4 cm. Obvod oblasti $\mathcal{O}$ je (v cm) rovný:



A: $9(4 + \pi)$ B: $8(4 + \pi)$ C: $9(3 + \pi)$ D: $8(3 + \pi)$

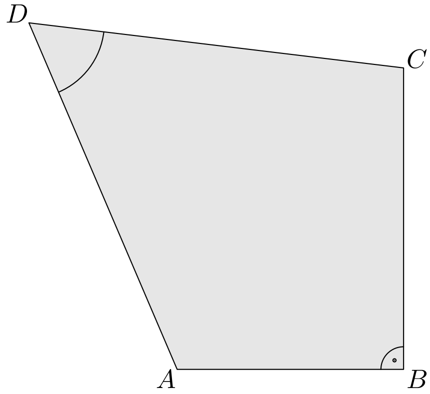
---

4. Štvoruholník $ABCD$ má dĺžky strán $|AB| = 3$ cm a $|BC| = 4$ cm. Strany CD a DA majú rovnakú dĺžku. Uhol pri vrchole B je pravý, protiľahlý uhol pri vrchole D má veľkosť 60°. Obvod štvoruholníka $ABCD$ je (v cm) rovný:



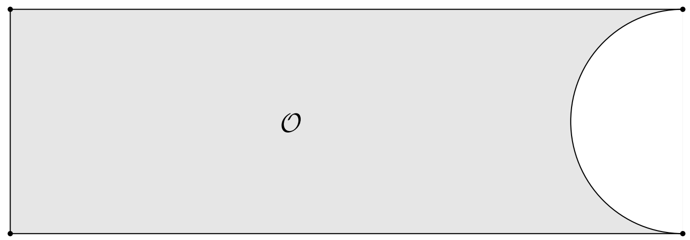
A: 15 B: 16 C: 17 D: 18

5. Štvoruholník $ABCD$ má dĺžky strán $|AB| = 3$ cm a $|BC| = 4$ cm. Strany CD a DA majú rovnakú dĺžku. Uhol pri vrchole B je pravý, protiľahlý uhol pri vrchole D má veľkosť $60°$. Obsah štvoruholníka $ABCD$ je (v cm^2) rovný:



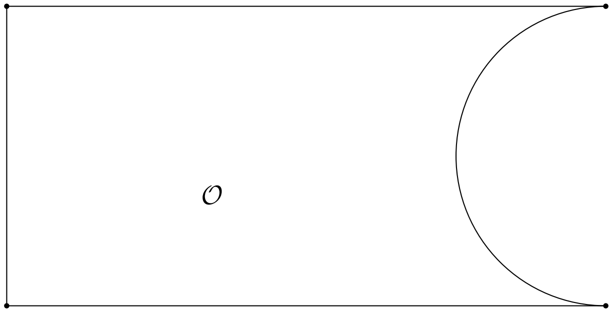
A: $\dfrac{21+22\sqrt{3}}{4}$ B: $\dfrac{22+23\sqrt{3}}{4}$ C: $\dfrac{23+24\sqrt{3}}{4}$ D: $\dfrac{24+25\sqrt{3}}{4}$

6. Na obrázku je znázornená oblasť $\mathcal{O}$, ktorá vznikla z obdĺžnika so stranami dlhými 3 cm a 9 cm vyrezaním polkruhu. Obsah oblasti $\mathcal{O}$ je (v cm^2) rovný:



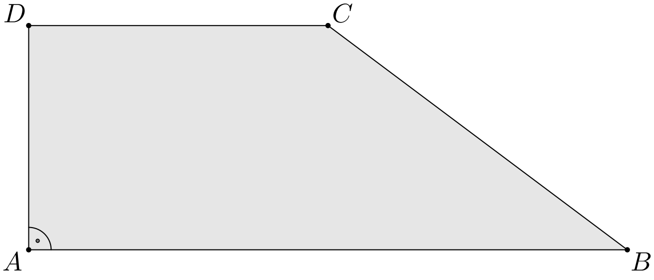
A: $\dfrac{9}{8}(22-\pi)$ B: $\dfrac{9}{8}(24-\pi)$ C: $\dfrac{9}{8}(26-\pi)$ D: $\dfrac{9}{8}(28-\pi)$

7. Na obrázku je znázornená oblasť $\mathcal{O}$, ktorá vznikla z obdĺžnika so stranami dlhými 4 cm a 8 cm vyrezaním polkruhu. Obvod oblasti $\mathcal{O}$ je (v cm) rovný:



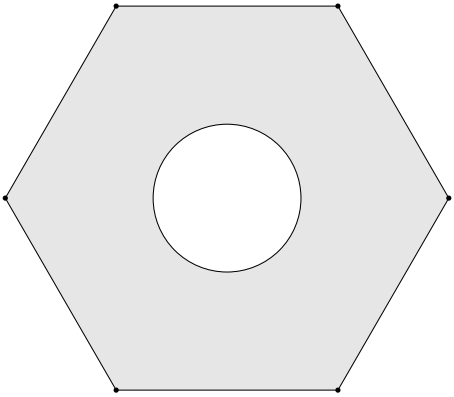
A: $2(10+\pi)$ B: $2(5+\pi)$ C: $4(5+\pi)$ D: $4(10+\pi)$

8. Obsah pravouhlého lichobežníka $ABCD$ s pravými uhlami pri vrcholoch A a D, s dĺžkami strán $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 5$ cm a $|CD| = 4$ cm je (v cm^2) rovný:



A: 18 B: 20 C: 22 D: 24

9. Na obrázku je znázornený trávnik v tvare pravidelného šesťuholníka so stranou dĺžky 6 m. Vo vnútri šesťuholníka je fontánka v tvare kruhu s priemerom 4 m. Plocha trávnatej časti je (v m^2) rovná:



A: $51\sqrt{3} - 4\pi$ B: $52\sqrt{3} - 4\pi$ C: $53\sqrt{3} - 4\pi$ D: $54\sqrt{3} - 4\pi$

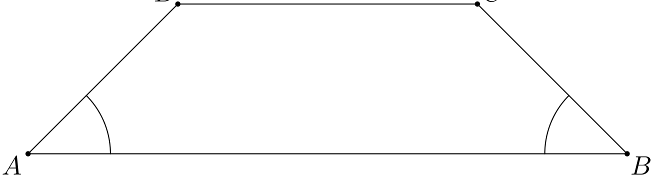
10. Obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ s dĺžkami strán $|AB| = 11$ cm, $|BC| =$ $= 5$ cm a $|CD| = 5$ cm je (v cm^2) rovný:

A: 26 B: 28 C: 30 D: 32

11. Obvod rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ s dĺžkami strán $|AB| = 9$ cm, $|CD| =$ $= 7$ cm a s výškou 3 cm je (v cm) rovný:

A: $2\left(4+\sqrt{10}\right)$ B: $2\left(8+\sqrt{10}\right)$ C: $2\left(12+\sqrt{10}\right)$ D: $2\left(16+\sqrt{10}\right)$

12. Obvod rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ s dĺžkami strán $|AB| = 8$ cm, $|CD| =$ $= 4$ cm a s veľkosťou uhlov pri vrcholoch A a B rovnou $45°$ je (v cm) rovný:



A: $4\left(3+\sqrt{2}\right)$ B: $4\left(3+\sqrt{3}\right)$ C: 20 D: $4\left(3+\sqrt{5}\right)$

13. Súčet veľkostí vnútorných vrcholových uhlov päťuholníka je rovný:

A: 520° B: 530° C: 540° D: 550°

14. Pomer veľkostí vnútorných vrcholových uhlov štvoruholníka je $\alpha : \beta : \gamma : \delta = 1 : 2 : 3 : 4$. Veľkosť uhla γ je rovná:

A: $108°$ B: $114°$ C: $120°$ D: $126°$

---

15. Obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ s dĺžkami strán $|AB| = 9$ cm, $|CD| = 5$ cm a s veľkosťou uhlov pri vrcholoch A a B rovnou $60°$ je (v cm^2) rovný:

A: 14 B: $14\sqrt{2}$ C: $14\sqrt{3}$ D: 28

---

16. Rovnoramenný trojuholník so základňou dlhou 7 cm má výšku 1 cm. Obvod trojuholníka sa (v cm) rovná:

A: $7 + \sqrt{51}$ B: $7 + \sqrt{52}$ C: $7 + \sqrt{53}$ D: $7 + \sqrt{54}$

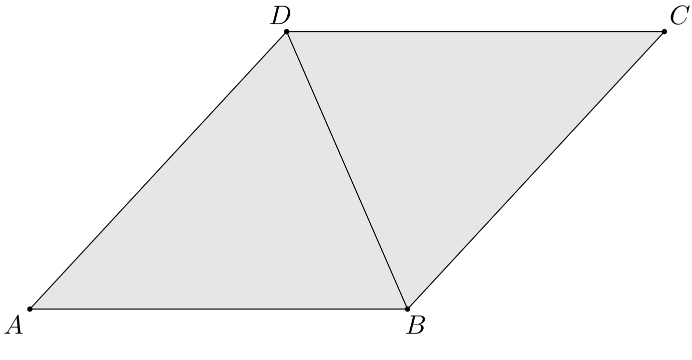
---

17. Veľkosť uhlopriečky obdĺžnika je štvornásobkom veľkosti jednej z jeho strán, ktorá je 3 cm. Obvod obdĺžnika sa (v cm) rovná:

A: $2\left(3 + \sqrt{130}\right)$ B: $6\left(1 + \sqrt{15}\right)$ C: $2\left(3 + \sqrt{140}\right)$ D: $2\left(3 + \sqrt{145}\right)$

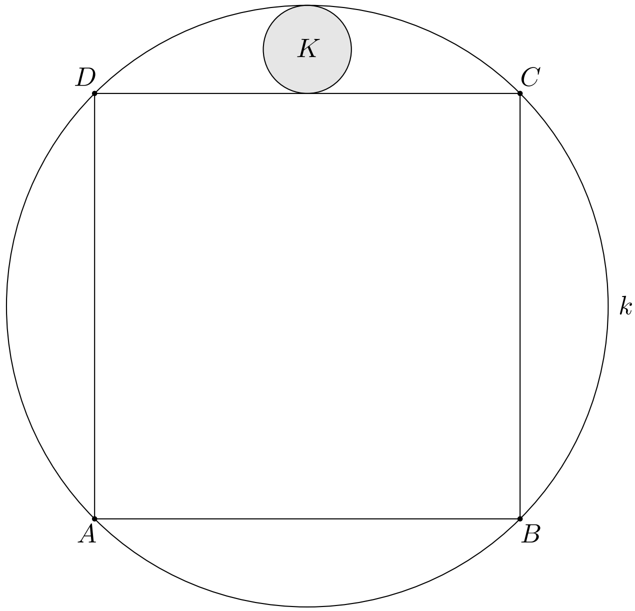
---

18. Kosoštvorec $ABCD$ so stranou dlhou 5 cm má jednu uhlopriečku, ktorej dĺžka je 4 cm. Obsah kosoštvorca $ABCD$ sa (v cm^2) rovná:



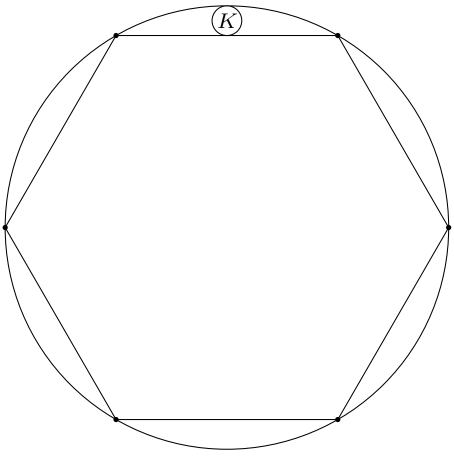
A: $4\sqrt{21}$ B: $4\sqrt{22}$ C: $4\sqrt{23}$ D: $4\sqrt{24}$

19. Štvorec $ABCD$ je vpísaný do kružnice k s polomerom 4 cm. Medzi štvorcom a kružnicou je vpísaný kruh K s maximálnym obsahom. Obsah kruhu K sa (v cm^2) rovná:



A: $\pi\left(6-\sqrt{2}\right)$ B: $2\pi\left(3-\sqrt{2}\right)$ C: $3\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$ D: $2\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)$

20. Do kružnice s polomerom 3 cm je vpísaný pravidelný šesťuholník. Medzi šesťuholníkom a kružnicou je vpísaný kruh K s maximálnym obsahom. Obvod kruhu K sa (v cm) rovná:



A: $\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$ B: $\dfrac{3\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$ C: $\pi\left(3-\sqrt{3}\right)$ D: $\dfrac{3\pi\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$

15 Percentá

15.1 Riešené príklady

1. Jeden liter benzínu stál 1,25 €. Zdražel o 8%. Po zdražení stojí jeden liter benzínu:

   A: 1,33 € B: 1,31 € C: 1,28 € D: 1,35 €

Riešenie. Pôvodná cena benzínu tvorí základ $z = 1{,}25$, ktorému zodpovedá 100%. Keďže zdražel o 8%, jeho nová cena je 108% zo základu z (t. j. počet percent $p = 108$). Stačí vypočítať príslušnú percentovú časť $č$:

$$č = \frac{p}{100} \cdot z = \frac{108}{100} \cdot 1{,}25 = 1{,}35,$$

a preto správna odpoveď je D.

Zdá sa, že táto úloha sa jednoduchšie dala vyriešiť pomocou trojčlenky (evidentne ide o priamu úmernosť):

$$\begin{array}{l|lr|}
\uparrow & 108\% \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & č \quad \uparrow \\
 & 100\% \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1{,}25
\end{array}$$

a odtiaľ

$$\frac{108}{100} = \frac{č}{1{,}25}, \qquad \text{a teda} \qquad č = \frac{108}{100} \cdot 1{,}25 = 1{,}35.$$

2. Počítač zlacnel v rámci akcie o 21 €, pričom jeho nová cena je 259 €. Počítač zlacnel o:

   A: 7,5% B: 8,1% C: 9,2% D: 10%

Riešenie. Pôvodná cena počítača bola

$$21 + 259 = 280 \ [€],$$

čo je základ z pre výpočet percent. Zlacnenie predstavuje percentovú časť, teda $č = 21$. Pre počet percent p, o ktorý sa znížila cena počítača, platí

$$p = \frac{č}{z} \cdot 100 = \frac{21}{280} \cdot 100 = 7{,}5. \tag{15.1}$$

Preto správna odpoveď je A.

„Nepriatelia vzorčekov“ by tu asi radšej siahli po trojčlenke

$$\begin{array}{l|rl|}
\uparrow & p\% \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 21 \ (č \text{ – zlacnenie}) \quad \uparrow \\
 & 100\% \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 280 \ (z \text{ – pôvodná cena})
\end{array}$$

a z nej by dostali

$$\frac{p}{100} = \frac{21}{280}\,.$$

Odtiaľ

$$p = \frac{21 \cdot 100}{280} = 7{,}5.$$

Šikovnejší sa dopracujú k výpočtom podľa (15.1) jednoduchou logickou úvahou.

---

3. Vo firme sa vyrobilo 1 859 výrobkov, čím bol splnený plán na 143%. Počet výrobkov, ktoré sa mali vyrobiť podľa plánu, je:

   A: 2 658 B: 1 300 C: 1 430 D: 1 310

Riešenie. Našou úlohou je určiť základ z – počet výrobkov, ktorý sa mal vyrobiť podľa plánu. Základu z zodpovedá 100%. Percentovej časti $č = 1\,859$ zodpovedá počet percent $p = 143$ zo základu. Pre základ platí vzťah

$$z = \frac{č}{p} \cdot 100,$$

čo v našom prípade dáva

$$z = \frac{1\,859}{143} \cdot 100 = 1\,300.$$

Preto správna odpoveď je B.

Táto úloha sa dala vyriešiť aj pomocou trojčlenky (evidentne ide o priamu úmernosť):

$$\begin{array}{l}\uparrow \\ \big| \end{array}\begin{array}{lr} 143\% \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\,859 \text{ výrobkov} \\ 100\% \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & z \text{ výrobkov} \end{array}\begin{array}{l}\uparrow \\ \big| \end{array}$$

Z nej dostaneme

$$\frac{143}{100} = \frac{1\,859}{z}\,,$$

a teda

$$z = \frac{1\,859 \cdot 100}{143} = 1\,300.$$

Správna je odpoveď B.

---

4. Traja brigádnici dostali za svoju prácu spolu 3 150 €. Rozdelili sa o ne podľa svojich výkonov tak, že prvý dostal tretinu z celkovej sumy a druhý dostal o 10% viac ako tretí. Koľko eur dostal každý (v poradí prvý, druhý a tretí) brigádnik?

   A: 1 050; 1 100; 1 000 B: 1 050; 1 000; 1 100 C: 1 050; 900; 1 200 D: 1 150; 1 100; 900

Riešenie. Tretina z 3 150 je 1 050, čo je odmena pre prvého brigádnika. Druhý a tretí takto spolu dostali $3\,150 - 1\,050 = 2\,100\,[€]$. Nech x je počet eur, ktoré dostal tretí brigádnik. Druhý brigádnik dostal o 10% viac ako tretí – dostal teda 110% z hodnoty x, čo prestavuje

$$\frac{110}{100} \cdot x = 1{,}1x.$$

Pre súčet odmien druhého a tretieho brigádnika dostávame

$$1{,}1x + x = 2\,100.$$

Potom $2{,}1x = 2\,100$, a teda $x = 1\,000$, čo je odmena pre tretieho brigádnika. Druhý brigádnik dostal

$$1{,}1x = 1{,}1 \cdot 1\,000 = 1\,100 \text{ [eur]}.$$

Brigádnici si rozdelili eurá tak, že prvý dostal 1 050 €, druhý 1 100 € a tretí 1 000 €. Správna odpoveď je A.

---

5. Maslo obsahuje 75% tuku, ktorý zo 60% pozostáva z rastlinného tuku. Koľko percent rastlinného tuku obsahuje toto maslo?

   A: 67,5 B: 15 C: 80 D: 45

Riešenie. Kto je zbehlý v počítaní s percentami odpovie: $0{,}75 \cdot 0{,}6 = 0{,}45$, čo predstavuje 45% rastlinného tuku a ďalej čítať nemusí. Vysvetlime si to! Nech z je základ – istý počet hmotnostných jednotiek masla. Toto maslo obsahuje

$$t = \frac{75}{100} \cdot z = 0{,}75z$$

hmotnostných jednotiek masla tuku. Tento tuk obsahuje 60% rastlinného tuku t_r, a teda

$$t_r = \frac{60}{100} \cdot t = 0{,}6 \cdot t = 0{,}6 \cdot (0{,}75z) = 0{,}45z.$$

Z toho je už mnohým jasné, že výsledok je 45%. Percentuálny obsah rastlinného tuku dostaneme z faktu že z hmotnostných jednotiek masla obsahuje $0{,}45z$ hmotnostných jednotiek rastlinného masla. Potom percentuálny obsah rastlinného tuku v masle je

$$p = \frac{0{,}45z}{z} \cdot 100 = 45.$$

Preto správna odpoveď je D.

---

6. Máme pripraviť 20 litrov šesťdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej. K dispozícii máme osemdesiatpercentný roztok kyseliny sírovej a destilovanú vodu (to je voda bez prímesí), ktorá neobsahuje kyselinu sírovú. Koľko litrov kyseliny sírovej potrebujeme na prípravu požadovaného roztoku?

   A: 10 B: 12 C: 15 D: 5

Riešenie. Príklad môžeme vyriešiť napríklad nasledujúcim spôsobom. Nech x je počet litrov stopercentného koncentrátu[5] kyseliny sírovej, ktorý je obsiahnutý v 20 litroch šesťdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej. Potom

$$x = \frac{60}{100} \cdot 20 = 12. \tag{15.2}$$

Poznamenávame, že tento výsledok sme mohli dostať aj z nasledujúcej trojčlenky (ide o nepriamu úmernosť):

$$\begin{array}{c|rcl|c} \uparrow & 60\% & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & 20\,(\text{litrov}) & \\ & 100\% & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & x\,(\text{litrov}) & \downarrow \end{array}$$

a odtiaľ

$$\frac{60}{100} = \frac{x}{20}\,.$$

Teda

$$x = \frac{60}{100} \cdot 20 = 12.$$

Teraz nám stačí zistiť, koľko litrov osemdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej obsahuje 12 litrov stopercentného koncentrátu kyseliny sírovej. Ak y je hľadané množstvo, tak dostaneme

$$y = \frac{100}{80} \cdot 12 = 15.$$

Aj tu sme si mohli pomôcť trojčlenkou. K tým 15 litrom osemdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej stačí doliať 5 litrov destilovanej vody, a preto správna odpoveď je C.

Tí, ktorí častejšie pripravujú roztoky určite poznajú zovšeobecnenie tejto úlohy. Máme pripraviť x litrov p_1-percentného roztoku istej látky, pričom k dispozícii máme jej p_2-percentný roztok, $p_2 > p_1$ a destilovanú vodu. Potom na splnenie úlohy stačí zmiešať

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot x \;\text{ litrov } p_2\text{-percentného roztoku a }\; \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) x \;\text{ litrov destilovanej vody.}$$

---

7. Nové auto stojí 22 000 €. Jeho trhová cena klesne amortizáciou v priebehu každého roka o 10%. Trhová cena auta bude o dva roky:

   A: 17 600 € B: 20 000 € C: 17 820 € D: 19 800 €

Riešenie. Trhová cena auta klesne v priebehu jedného roka o 10%, t. j. jeho cena po jednom roku bude 90% ceny novovyrobeného auta. Pre túto cenu $č$, tzv. percentovú časť, platí vzťah

$$č = \frac{p}{100} \cdot z, \tag{15.3}$$

[5] Takýto koncentrát prakticky neexistuje, ale môžeme robiť o ňom teoretické úvahy

kde p je počet percent a z je základná trhová hodnota auta na začiatku sledovaného roku. Takto trhová cena auta po prvom roku je

$$\check{c}_1 = \frac{90}{100} \cdot 22\,000 = 19\,800.$$

V priebehu druhého roka, na začiatku ktorého je jeho cena 19 800 €, trhová cena opäť klesne o 10%. Môžeme ju získať podľa (15.3), kde teraz $z = 19\,800$:

$$\check{c}_2 = \frac{90}{100} \cdot 19\,800 = 17\,820.$$

Správna odpoveď je C.

Tí, čo majú trochu väčšiu rutinu v počítaní s percentami, dôjdu k záveru napríklad takto:

$$22\,000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 17\,820.$$

---

8. Klient má v banke uložených 2 500 € s trojpercentným ročným úrokom. Banka mu na konci roka odvedie z úrokov dvadsaťpercentnú daň. Predpokladáme, že klient na svoje konto nič nevkladá a ani z neho nevyberá. Čistý zisk klienta po uplynutí dvoch rokov bude:

   A: 90 € B: 152,25 € C: 60 € D: 121,44 €

Riešenie. Úlohu vyriešime tak, že „zabudneme na vzorčeky“ a budeme vychádzať len z jedného faktu:

1% z nejakej hodnoty (základu z) je jedna stotina tejto hodnoty, t. j. $\frac{1}{100} \cdot z$

Potom zrejme

p% z nejakej hodnoty (základu z) je p stotín tejto hodnoty, t. j. $\frac{p}{100} \cdot z$.

Banka pripíše klientovi na konci prvého roka trojpercentný úrok z jeho vkladu, čiže úroky vo výške

$$\frac{3}{100} \cdot 2\,500 = 75\,[\text{eur}]$$

20% z týchto úrokov je

$$\frac{20}{100} \cdot 75 = 15\,[\text{eur}]$$

čo predstavuje daň z úrokov, ktorú banka strhne klientovi z úrokov. Takto čistý zisk klienta za prvý rok je úroky mínus daň:

$$z_1 = 75 - 15 = 60\,[\text{eur}].$$

Po prvom roku bude mať klient na svojom konte pôvodný vklad plus zisk, čo činí

$$2\,500 + 60 = 2\,560\,[\text{eur}].$$

Tým istým postupom dostaneme aj zisk klienta za druhý rok, len s tým rozdielom, že „vyštartujeme“ hodnotou 2 560 € jeho vkladu na začiatku druhého roka.
Úroky za druhý rok sú

$$\frac{3}{100} \cdot 2\,560 = 76{,}8\,[\text{eur}].$$

Daň z úrokov je

$$\frac{20}{100} \cdot 76{,}8 = 15{,}36\,[\text{eur}]$$

a zisk klienta za druhý rok je

$$z_2 = 76{,}8 - 15{,}36 = 61{,}44\,[\text{eur}].$$

Celkový čistý zisk klienta za dva roky je

$$z = z_1 + z_2 = 60 + 61{,}44 = 121{,}44\,[\text{eur}],$$

a preto správna odpoveď je D.

Na záver uvedieme zovšeobecnenie tohto príkladu. Vypočítame, koľko eur pribudne klientovi za jeden rok, ak na začiatku roka má na konte vklad v eur, pričom úročenie jeho vkladu je každý rok p_u-percentné a daň predstavuje p_d percent. Na konci roka na úrokoch získa[6] (vklad v predstavuje základ – 100%)

$$u = \frac{p_u}{100} \cdot v.$$

Ak vám tento vzťah nie je známy, tak si ho odvoďte napríklad pomocou trojčlenky:

$$\left\uparrow \begin{array}{lcr} p_u & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & u \\ 100 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & v \end{array} \right\uparrow$$

Daň d z týchto úrokov je (teraz základom sú úroky u a opäť si môžete pomôcť trojčlenkou)

$$d = \frac{p_d}{100} \cdot u = \frac{p_d}{100} \cdot \frac{p_u}{100} \cdot v.$$

Je zrejmé, že zisk z klienta za jeden rok (pri vklade v eur na začiatku roka) dostaneme, ak od úrokov odčítame daň, teda

$$z = u - d = \frac{p_u}{100} \cdot v - \frac{p_d}{100} \cdot \frac{p_u}{100} \cdot v = \frac{p_u}{100}\left(1 - \frac{p_d}{100}\right) v. \tag{15.4}$$

Pripomíname, že podľa (15.4) dostaneme ročný zisk klienta na konci roka, ak na začiatku roka mal na konte vklad v eur.

Teraz vyriešime danú úlohu. Zisk klienta za prvý rok dostaneme, ak v (15.4) dosadíme $p_u = 3$, $p_d = 20$ a $v = 2\,500$:

$$z_1 = \frac{3}{100}\left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot 2\,500 = 60.$$

[6] všetky medzivýsledky sú v eurách

Takto po prvom roku bude mať klient na konte $2\,500 + 60 = 2\,560$ eur. To je vklad pre výpočet jeho zisku v druhom roku. Opäť podľa (15.4) dostaneme

$$z_2 = \frac{3}{100}\left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot 2\,560 = 61{,}44.$$

Na konci druhého roku bude mať klient na účte $2\,560 + 61{,}44 = 2\,621{,}44$ eur. Teda jeho zisk za sledované dva roky je 121,44 €, čo je v zhode s predchádzajúcim výsledkom.

15.2 Úlohy

1. Koľko percent je 498 kg z 3 ton?

   A: 16,6 B: 1,66 C: 49,8 D: 16,2

2. Koľko minút je 19% z piatich hodín?

   A: 45 B: 19 C: 57 D: 95

3. Vo firme pracuje 500 zamestnancov, z nich je 45% mužov. Koľko žien pracuje vo firme?

   A: 275 B: 225 C: 50 D: 450

4. Na zakúpenie prístroja je možné z projektu použiť 360 €, čo je 40% z ceny prístroja. Koľko eur stojí prístroj?

   A: 504 B: 900 C: 400 D: 1 440

5. Pôvodná cena výrobku bola 48 €. Po zlacnení stojí výrobok 36 €. O koľko percent bola znížená jeho pôvodná cena?

   A: 12 B: 75 C: 84 D: 25

6. Na konkurze neuspelo 30% uchádzačov z 90 účastníkov. Koľko bolo úspešných účastníkov konkurzu?

   A: 7 B: 63 C: 60 D: 10

7. Na štátnej záverečnej skúške štúdia sa zúčastnilo 80 študentov. Desiati z nich prospeli s vyznamenaním, 85% študentov prospelo (bez vyznamenania) a zvyšok študentov neprospel. Koľko študentov neprospelo?

   A: 2 B: 5 C: 10 D: 7

8. Výstavba železničnej trate stála 192 500 €, čo predstavuje 110% predpokladaných nákladov. Aké boli predpokladané náklady na výstavbu trate?

   A: 17 500 € B: 21 175 € C: 175 000 € D: 211 750 €

---

9. Firma dosiahla za kalendárny rok zisk 51 000 €. Zo zisku odviedla dvadsaťpercentnú daň. Zo zvyšku polovicu investovala do svojho rozvoja. Koľko eur firma investovala na svoj rozvoj?

   A: 25 400 B: 25 500 C: 10 200 D: 20 400

---

10. Firma dosiahla za kalendárny rok čistý zisk 40 000 €. Zo zisku darovala 10% na charitu a zvyšok rovnomerne rozdelila 200 akcionárom vo forme dividend. Koľko eur dostal každý akcionár?

    A: 50 B: 180 C: 200 D: 20

---

11. Firma za ostatné roky investovala do svojho rozvoja. Druhý rok investovala o 60% viac ako v prvom roku a v treťom roku o 40% viac ako v druhom roku. V treťom roku investovala 112 000 €. Koľko eur investovala v prvom roku?

    A: 50 000 B: 62 200 C: 56 000 D: 80 000

---

12. Faktúra na 220 € bola splatná do 15. júla. Uhradená bola po tomto termíne. Koľko treba zaplatiť, ak sa za oneskorenú úhradu účtuje jednorázový 30% poplatok z fakturovanej sumy?

    A: 268 € B: 235 € C: 286 € D: 250 €

---

13. Pri sušení húb sa ich hmotnosť zmenší o 85%. Koľko čerstvých húb je potrebné nazbierať, aby sme získali 3 kg sušených húb?

    A: 3,529 kg B: 20 kg C: 25,5 kg D: 28,33 kg

---

14. Obdĺžnikové klzisko s rozmermi 50 m a 22 m chceme pokryť päťcentimetrovou vrstvou ľadu. Koľko litrov vody na to spotrebujeme, ak je známe, že voda po zamrznutí zväčší svoj objem o 10%?

    A: 50 000 B: 55 000 C: 45 000 D: 60 000

---

15. Klient má v banke uložených 3 000 € s trojpercentným ročným úrokom. Banka mu na konci roka odvedie z úrokov dvadsaťpercentnú daň. Aký je čistý ročný zisk klienta?

    A: 60 € B: 6 € C: 54 € D: 72 €

---

16. V nádobe je 10 litrov sedemdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej. Do nádoby prilejeme 15 litrov destilovanej vody (bez prímesí). Koľkopercentný roztok kyseliny sírovej získame?

    A: 14 B: 28 C: 67 D: 42

---

17. Dvaja brigádnici dostali za svoju prácu spolu 810 €. Rozdelili sa o ne tak, že 40% z toho, čo dostal prvý brigádnik sa rovnalo 50% z toho, čo dostal druhý brigádnik. Koľko eur dostal prvý brigádnik?

    A: 324 B: 405 C: 450 D: 360

---

18. 75% žiakov triedy chce študovať technické obory. Z nich 60% chce študovať na Technickej univerzite v Košiciach. Koľko percent žiakov z celej triedy chce študovať na Technickej univerzite v Košiciach?

    A: 36 B: 40 C: 8 D: 45

---

19. V triede je 25% dievčat. 25% chlapcov tejto triedy chce študovať na Technickej univerzite v Košiciach, čo je o 26 žiakov menej ako je počet žiakov triede. Koľko je žiakov v triede?

    A: 32 B: 40 C: 36 D: 28

---

20. Nektár, ktorý včely zbierajú obsahuje 70% vody. Z nektáru sa istým procesom vytvára med, ktorý obsahuje 19% vody. Koľko kilogramov nektáru musia včely nazbierať na 1 kg medu?

    A: 1,3 B: 1,2 C: 2,1 D: 2,7

16 Výsledky úloh

Kapitola 1

1) B • 2) C • 3) A • 4) C • 5) D • 6) A • 7) B • 8) B • 9) C • 10) B • 11) B • 12) A • 13) D • 14) B • 15) B • 16) B • 17) D • 18) C • 19) D • 20) A

Kapitola 2

1) D • 2) B • 3) B • 4) C • 5) A • 6) A • 7) D • 8) C • 9) D • 10) B • 11) A • 12) D • 13) B • 14) B • 15) A • 16) C • 17) A • 18) D • 19) B • 20) A

Kapitola 3

1) C • 2) B • 3) D • 4) B • 5) C • 6) A • 7) B • 8) A • 9) B • 10) A • 11) D • 12) A • 13) C • 14) B • 15) B • 16) C • 17) D • 18) B • 19) B • 20) B

Kapitola 4

1) D • 2) C • 3) D • 4) B • 5) B • 6) D • 7) A • 8) B • 9) B • 10) A • 11) D • 12) B • 13) C • 14) D • 15) C • 16) A • 17) B • 18) A • 19) D • 20) B

Kapitola 5

1) B • 2) A • 3) D • 4) A • 5) C • 6) A • 7) B • 8) D • 9) B • 10) C • 11) A • 12) C • 13) A • 14) B • 15) C • 16) A • 17) D • 18) D • 19) D • 20) C • 21) C • 22) A

Kapitola 6

1) C • 2) D • 3) D • 4) C • 5) C • 6) A • 7) C • 8) C • 9) B • 10) A • 11) A • 12) A • 13) D • 14) D • 15) C • 16) A • 17) D • 18) C • 19) A • 20) A • 21) C

Kapitola 7

1) B • 2) D • 3) C • 4) D • 5) C • 6) C • 7) B • 8) B • 9) A • 10) A • 11) B • 12) B • 13) A • 14) A • 15) B • 16) C • 17) B • 18) D • 19) A • 20) A

Kapitola 8

1) D • 2) A • 3) A • 4) C • 5) A • 6) C • 7) D • 8) A • 9) B • 10) B • 11) B • 12) B • 13) A • 14) A • 15) D • 16) A • 17) B • 18) D • 19) A • 20) B

Kapitola 9

1) B • 2) C • 3) B • 4) B • 5) D • 6) A • 7) C • 8) C • 9) A • 10) C • 11) B • 12) D • 13) C • 14) A • 15) D • 16) B • 17) C • 18) B • 19) B • 20) B

Kapitola 10

1) B • 2) C • 3) B • 4) C • 5) A • 6) A • 7) C • 8) B • 9) A • 10) B • 11) C • 12) D • 13) C • 14) D • 15) C • 16) D • 17) C • 18) A • 19) D • 20) C

Kapitola 11

1) B • 2) D • 3) D • 4) A • 5) D • 6) B • 7) B • 8) B • 9) C • 10) B • 11) C • 12) A • 13) B • 14) A • 15) B • 16) D • 17) B • 18) C • 19) B • 20) B

Kapitola 12

1) C • 2) B • 3) C • 4) B • 5) C • 6) A • 7) C • 8) C • 9) B • 10) D • 11) C • 12) B • 13) A • 14) B • 15) A • 16) C • 17) C • 18) A • 19) C • 20) D

Kapitola 13

1) D • 2) B • 3) C • 4) C • 5) A • 6) C • 7) B • 8) B • 9) D • 10) C • 11) B • 12) C • 13) B • 14) A • 15) D • 16) C • 17) A • 18) B • 19) C • 20) B • 21) C

Kapitola 14

1) C • 2) B • 3) B • 4) C • 5) D • 6) B • 7) A • 8) A • 9) D • 10) D • 11) B • 12) A • 13) C • 14) A • 15) C • 16) C • 17) B • 18) A • 19) D • 20) B

Kapitola 15

1) A • 2) C • 3) A • 4) B • 5) D • 6) B • 7) A • 8) C • 9) D • 10) B • 11) A • 12) C • 13) B • 14) A • 15) D • 16) B • 17) C • 18) D • 19) A • 20) D

17 Vzorové testy

Test 1

Na vyriešenie úloh a označenie správnych odpovedí máte 90 minút.[7] Za správnu odpoveď získate 10 bodov, za nesprávnu odpoveď 3 body stratíte. Za nevyplnenú odpoveď sa Vám započíta 0 bodov.

---

1. Číslo $-3 + \frac{2}{3} - \frac{0}{4}$ je:

   A: menšie ako $-\frac{5}{2}$ B: väčšie ako $-\frac{8}{3}$ C: rovné $-\frac{1}{3}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

2. Výraz $\frac{x}{\sqrt{x}-2} - \frac{x}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{x-4}$ je rovný:

   A: $\frac{3x}{x-4}$ B: $\frac{2x\sqrt{x}-x}{x-4}$ C: $\frac{5x}{x-4}$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

3. Sústava

$$\begin{aligned} x + 5y &= 6 \\ -5x - 10y &= -15 \end{aligned}$$

   má v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jediné riešenie $[x_0, y_0]$, pre ktoré platí:

   A: $2x_0 - y_0 = 0$ B: $2x_0 - y_0 = 1$ C: $2x_0 - y_0 = 2$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

4. Počet párnych čísel, ktoré vyhovujú nerovnici $\frac{8-x}{x+4} > 0$, je:

   A: 2 B: 3 C: 4 D: 5

---

5. Počet riešení rovnice $|2x+6| + 2x + 6 = 0$ je:

   A: 0 B: 1 C: 2 D: ∞

---

6. Grafy funkcií $f\colon\ y = 3x - 1$ a $g\colon\ y = -2x + 14$ sa pretínajú v bode:

   A: $[3; 8]$ B: $[3; -2]$ C: $[-1; 14]$ D: $[0; -1]$

---

7. Ak $f(x) = \frac{4-2x}{x^2}$, tak hodnota $f(-0{,}2)$ je:

   A: -90 B: 11 C: 90 D: 110

[7] Uvádzané údaje o časovom limite a počtoch bodov sú orientačné a môžu sa zmeniť.

8. Jedna z kvadratických rovníc, ktoré majú oba korene o 5 väčšie ako rovnica

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

je:

A: $x^2 - 15x + 56 = 0$ B: $x^2 - 10x + 1 = 0$ C: $x^2 - 6x + 5 = 0$ D: $x^2 + 11 = 0$

---

9. Ak $\log_5 x^2 = 4$ a $x > 0$, tak $3 \log_5 x$ je:

A: 1 B: 2 C: 3 D: 6

---

10. Jeden zo smerových vektorov všetkých priamok rovnobežných s priamkou danou rovnicou $2x - 3y + 1 = 0$ je:

A: $(-3; 2)$ B: $(2; -3)$ C: $(2; 3)$ D: $(3; 2)$

---

11. Rovnica elipsy so stredom v bode $S = [2; -2]$ a polosami $a = 3$, $b = 2$ je:

A: $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y - 1 = 0$ B: $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$
C: $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 80 = 0$ D: $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 100 = 0$

---

12. Pre $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, je výraz $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$ rovný výrazu:

A: 1 B: $\dfrac{2}{\sin 2x}$ C: $2\operatorname{tg} x$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

13. Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti je $s_n = n^2 + 3n$. Potom piaty člen tejto postupnosti je:

A: 80 B: 24 C: 12 D: 40

---

14. Obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ s dĺžkami strán $|AB| = 11$ cm, $|BC| = 5$ cm a $|CD| = 5$ cm je (v cm^2) rovný:

A: 26 B: 28 C: 30 D: 32

15. Faktúra na 220 € bola splatná do 15. júla. Uhradená bola po tomto termíne. Koľko treba zaplatiť, ak sa za oneskorenú úhradu účtuje jednorázový 30% poplatok z fakturovanej sumy?

A: 268 € B: 235 € C: 286 € D: 250 €

Test 2

Na vyriešenie úloh a označenie správnych odpovedí máte 90 minút.[8] Za správnu odpoveď získate 10 bodov, za nesprávnu odpoveď 3 body stratíte. Za nevyplnenú odpoveď sa Vám započíta 0 bodov.

---

1. Číslo 0,2 je:

   A: rovné $\frac{8}{15} - \frac{1}{3}$ B: väčšie ako $\frac{1}{4}$ C: rovné $\frac{19}{20} - \frac{1}{4}$ D: menšie ako $\frac{1}{2} - 1$

---

2. Výraz $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ nie je definovaný iba pre x rovné:

   A: -2; -1; 1; 2 B: -2; 1; 2 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

3. V triede je 28 žiakov. Ak by chlapcov bolo o 6 menej, bolo by ich toľko, koľko je dievčat. Počet dievčat v triede je:

   A: 8 B: 11 C: 17 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

4. Počet riešení nerovnice $\frac{x}{x-3} \geqq \frac{x+2}{x-7}$ na množine celých kladných čísel je:

   A: 1 B: 3 C: 4 D: 6

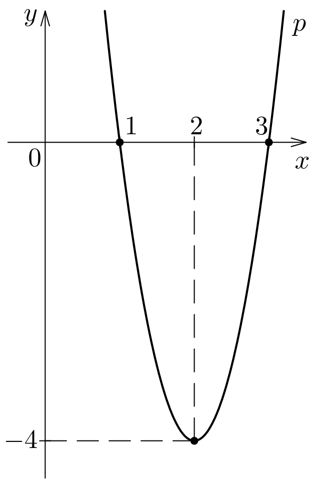
---

5. Všetky reálne korene rovnice $|x - 5| + 7 = x^2$ sú z intervalu:

   A: $(-4; 4\rangle$ B: $(-3; 3\rangle$ C: $\langle -4; 4)$ D: $\langle -4; 3)$

---

6. Parabola p, znázornená na obrázku,



[8] Uvádzané údaje o časovom limite a počtoch bodov sú orientačné a môžu sa zmeniť.

je grafom funkcie $y = f(x)$, ktorá je daná predpisom:

A: $y = (x-1)(x-3)$ B: $y = (x+1)(x+3)$ C: $y = -4(x-1)^2(x-3)^2$ D: $y = 4x^2 - 16x + 12$

---

7. Definičným oborom funkcie $f : y = \log_2(2-x) - \dfrac{x+3}{x}$ je:

A: $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ B: $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$ C: $(-\infty; 0) \cup (0; 2\rangle$ D: $(0; 2)$

---

8. Ak x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + 4x - 12 = 0$, tak číslo $2x_1 - x_2$ je:

A: -14 B: -10 C: -2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

9. Rovnica $\log_3(2x+5) = 4$ má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je z intervalu:

A: $(-\infty; 2)$ B: $\langle 2; 5)$ C: $\langle 5; 38)$ D: $\langle 38; \infty)$

---

10. Rovnice $x = 2 + 3t,\ y = -1 + 5t,\ t \in \mathbb{R}$ sú rovnicami:

A: úsečky B: polpriamky C: priamky D: roviny

---

11. Rovnica dotyčnice k parabole $x^2 + 20y = 0$ v bode $[10; -5]$ je:

A: $x - y - 15 = 0$ B: $x + y - 5 = 0$ C: $2x + y - 15 = 0$ D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

12. Podmienky $\sin x > 0$ a $\cos x > 0$ pre $0 \leqq x \leqq 2\pi$ sú ekvivalentné s podmienkou:

A: $x \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right)$ B: $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2} \right)$ C: $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi \right)$ D: $x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2} \right)$

---

13. Prvé dva členy klesajúcej geometrickej postupnosti sú z množiny $\{12; 24\}$. Prvých päť členov tejto postupnosti je:

A: 24; 12; 6; 3; 1 B: 12; 24; 36; 48; 60 C: 24; 12; 6; 3; 1,5 D: 24; 12; 0; -12; -24

14. Obvod rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ s dĺžkami strán $|AB| = 9$ cm, $|CD| =$ $= 7$ cm a s výškou 3 cm je (v cm) rovný:

A: $2\left(4+\sqrt{10}\right)$ B: $2\left(8+\sqrt{10}\right)$ C: $2\left(12+\sqrt{10}\right)$ D: $2\left(16+\sqrt{10}\right)$

15. Firma dosiahla za kalendárny rok zisk 51 000 €. Zo zisku odviedla dvadsaťpercentnú daň. Zo zvyšku polovicu investovala na svoj rozvoj. Koľko eur firma investovala na svoj rozvoj?

A: 25 400 B: 25 500 C: 10 200 D: 20 400

Použitá literatúra

[1] Ľ. Bálint – J. Bobek – M. Križalkovičová – J. Lukátšová: *Zbierka úloh z matematiky na prijímacie skúšky na stredné školy*, SPN Bratislava, 1984, 67-325-84.

[2] Š. Berežný – V. Mislivcová: *Prehľad základov z matematiky pre záujemcov o štúdium na Leteckej fakulte Technickej univerzity v Košiciach*, 4. preprac. vyd., TU Košice, 2010, 72 s., ISBN 978-80-553-0465-6.

[3] J. Buša – Š. Schrötter: *Stredoškolská matematika pre študentov a uchádzačov o štúdium na FEI TU v Košiciach*, FEI TU Košice, 2010, 125 s., ISBN 978-80-553-0477-9.

[4] O. Hudec – Z. Kimáková – E. Švidroňová: *Príklady z matematiky pre uchádzačov o štúdium na TU v Košiciach*, EkF TU Košice, 2003, 106 s., ISBN 80-8073-049-0 (dá sa stiahnuť zo stránky `http://www.ekf.tuke.sk/index.php?id=exam`).

[5] B. Kamenská – D. Zacharová – I. Zachar: *Testy 2008 – Matematika*, Pedagogické vydavateľstvo DIDAKTIS, s.r.o., 2007, ISBN 978-80-89160-51-8.

[6] D. Knežo – C. Hospodár – Z. Kimáková – E. Švidroňová: *Zbierka príkladov pre uchádzačov o štúdium na Strojníckej fakulte TU*, ELFA s.r.o, Košice, 2000, 51 s., ISBN 80-7099-506-8.

[7] *Testy 2004 – Matematika*, Pedagogické vydavateľstvo DIDAKTIS, s.r.o., 2003, ISBN 80-85456-04-4.

[8] *Testy 2003 – Matematika*, Pedagogické vydavateľstvo DIDAKTIS, s.r.o., 2002, ISBN 80-85456-83-4.

AUTORI: Martin Bača, Ján Buša, Andrea Feňovčíková, Zuzana Kimáková, Denisa Olekšáková, Štefan Schrötter

NÁZOV: Zbierka riešených a neriešených úloh z matematiky pre uchádzačov o štúdium na TU v Košiciach

VYDAVATEĽ: Technická univerzita v Košiciach

POČET STRÁN: 149

NÁKLAD: 300 ks

VYDANIE: prvé

DÁTUM VYDANIA: 11. 11. 11

SADZBA: programom pdfLaTeX

TLAČ: Elfa, s.r.o, Košice

ISBN 978-80-553-0833-3