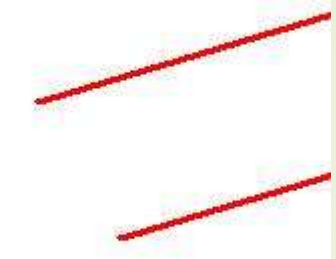
VZÁJOMNÉ POLOHY PRIAMOK

RNDr. M. Jenisová

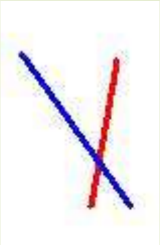
vzájomné polohy priamok v rovine:

- rovnobežné



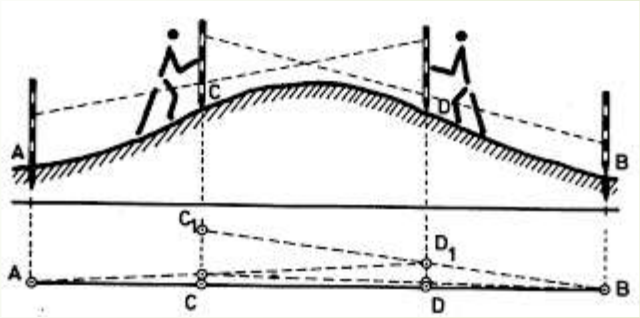
- totožné

- rôznobežné (špeciálny prípad - kolmé)



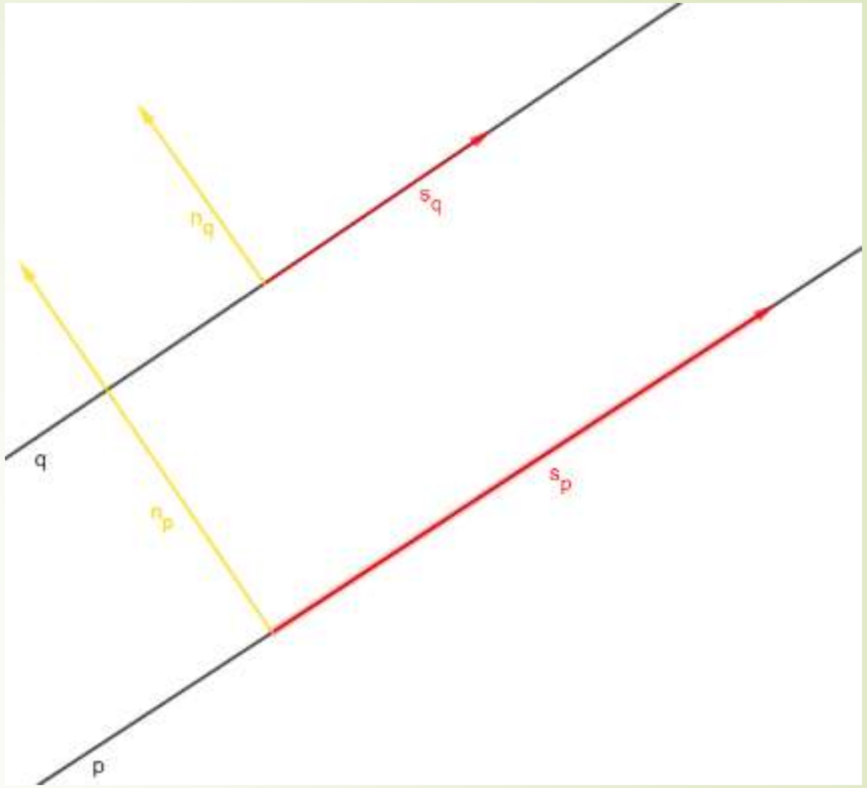
vzájomnú polohu môžeme určovať z pohľadu :

- smerových alebo normálových vektorov
- počtu spoločných bodov
- smerníc a úsekov na osi y



smerové a normálové vektory

ROVNOBEŽNÉ PRIAMKY
TOTOŽNÉ PRIAMKY



- smerové vektory priamok **SÚ** lineárne závislé

$$\overrightarrow{s_p} = k.\overrightarrow{s_q}$$

- normálové vektory priamok **SÚ** lineárne závislé

$$\overrightarrow{n_p} = k.\overrightarrow{n_q}$$

Pr. 1 : Urč vzájomnú polohu priamok:

$p: x = 1 + 2t$

$\quad y = 2 - 3t \qquad t \in R$

$q: x = -1 + 2k$

$\quad y = 7 - 3k \qquad k \in R$

$\overrightarrow{s_p}(2; -3)$

$\overrightarrow{s_q}(2; -3)$

smerové vektory sú rovnaké ⇒ priamky sú rovnobežné alebo totožné

vezmeme bod priamky *p* a zistíme, či patrí priamke *q*

$A[1; 2] \in p$

$A[1; 2] \in q\ ?\quad 1 = -1 + 2k \qquad\qquad k = 1$

$\qquad\qquad\qquad 2 = 7 - 3k \qquad\qquad k = -\frac{5}{3}$

bod $A \notin q$ ⇒ **priamky sú rovnobežné** $\quad \boldsymbol{p \parallel q}$

Pr. 2 : Urč vzájomnú polohu priamok:

$p: 2x + y - 1 = 0$

$q: 4x + 2y - 2 = 0$

$\overrightarrow{n_p}(2; 1)$

$\overrightarrow{n_q}(4; 2)$

normálové vektory sú lineárne závislé ⇒ priamky sú rovnobežné alebo totožné

vezmeme bod priamky *p* a zistíme, či patrí priamke *q*

určte ľubovoľný bod priamky p

napr.: $A[-1; 3] \in p$

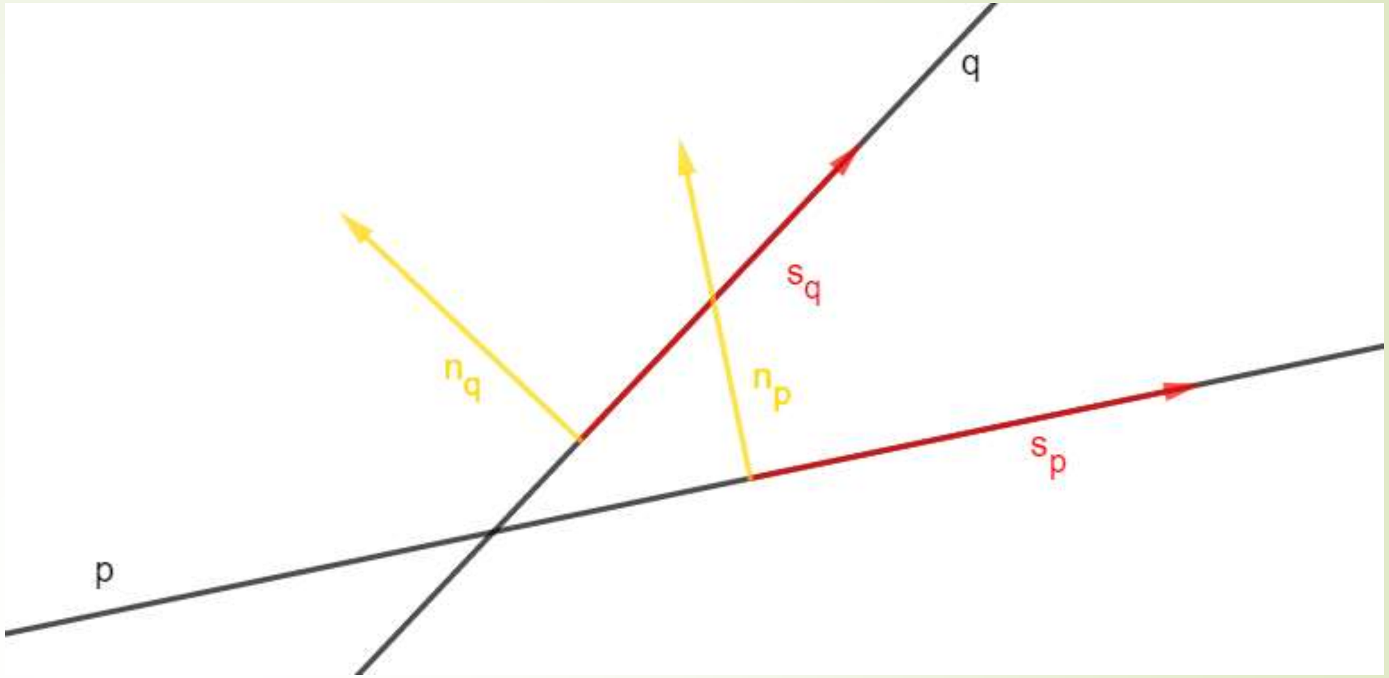
$A[-1; 3] \in q$?

$4(-1) + 2 . 3 - 2 = 0$

$0 = 0$

bod $A \in q$ ⇒ **priamky sú totožné** $\boldsymbol{p \equiv q}$

RÔZNOBEŽNÉ PRIAMKY



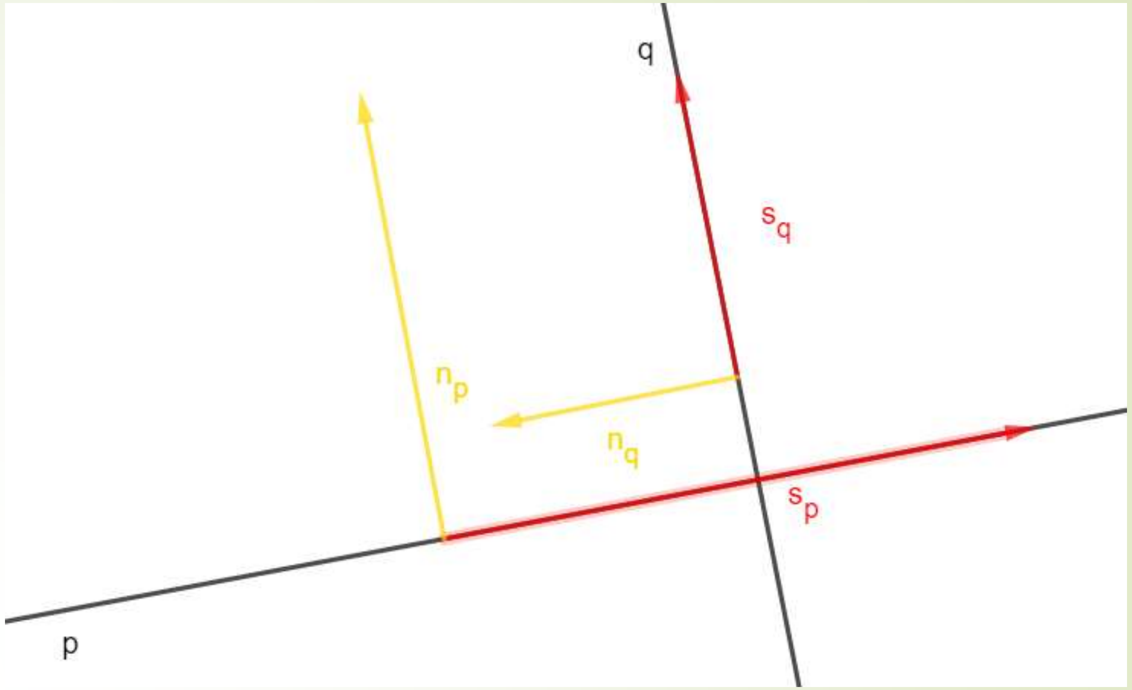
- smerové vektory priamok **nie sú** lineárne závislé

$$\overrightarrow{s_p} \neq k.\overrightarrow{s_q}$$

- normálové vektory priamok **nie sú** lineárne závislé

$$\overrightarrow{n_p} \neq k.\overrightarrow{n_q}$$

KOLMÉ PRIAMKY



- smerové vektory priamok sú na seba kolmé

$$\overrightarrow{s_p} \,.\, \overrightarrow{s_q} = 0$$

- normálové vektory priamok sú na seba kolmé

$$\overrightarrow{n_p} \,.\, \overrightarrow{n_q} = 0$$

Pr. 3 : Urč vzájomnú polohu priamok:

$p: 2x + y - 1 = 0$

$q: x - 2y - 8 = 0$

$\overrightarrow{n_p}(2; 1)$

$\overrightarrow{n_q}(1; -2)$

normálové vektory nie sú lineárne závislé ⇒ **priamky sú rôznobežné** $\boldsymbol{p \nparallel q}$

môžeme si všimnúť, že $\overrightarrow{n_p} \cdot \overrightarrow{n_q} = 0$ ⇒ **priamky sú kolmé** $\boldsymbol{p \perp q}$

Pr.4 : Urč vzájomnú polohu priamok:

$p: x = 1 + 2t$

$\quad y = 2 - 3t \qquad t \in R$

$q: x = -1 + 4k$

$\quad y = 9 - 5k \qquad k \in R$

$\overrightarrow{s_p}(2; -3)$

$\overrightarrow{s_q}(4; -5)$

smerové vektory nie sú lineárne závislé ⇒ **priamky sú rôznobežné** $\boldsymbol{p \nparallel q}$

počet spoločných bodov priamok

počet spoločných bodov dvoch priamok nás jednoznačne informuje o vzájomnej polohe priamok:

- rôznobežky majú **jeden** spoločný bod
- rovnobežky **nemajú** spoločný bod
- totožné priamky majú **nekonečne veľa** spoločných bodov

Pr. 5 : Ukážte, že priamky $\boldsymbol{a}\colon\ \mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{5}\boldsymbol{y}+\mathbf{6}=\mathbf{0}$ a $\boldsymbol{b}\colon\ \mathbf{8}\boldsymbol{x}+\mathbf{15}\boldsymbol{y}+\mathbf{10}=\mathbf{0}$ sú rôznobežné a urč súradnice priesečníka.

budeme hľadať len priesečníky a podľa ich počtu určíme vzájomnú polohu

ak nejaký priesečník $\boldsymbol{P}$ existuje, označme jeho súradnice $[\boldsymbol{x_P};\ \boldsymbol{y_P}]$

bod $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{a}$, preto jeho súradnice musia vyhovovať rovnici: $2\boldsymbol{x_P} - 5\boldsymbol{y_P} + 6 = 0$

bod $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{b}$, preto jeho súradnice musia vyhovovať rovnici: $8\boldsymbol{x_P} + 15\boldsymbol{y_P} + 10 = 0$

pred našimi očami máme sústavu rovníc, ktorú vyriešte

$\boldsymbol{x_P} = \mathbf{-2} \qquad \boldsymbol{y_P} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$

sústava má jedno riešenie $\boldsymbol{P}\left[\mathbf{-2};\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right] \Rightarrow$ **priamky sú rôznobežné** $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$

Pr. 6 : Ukážte, že priamka $a: 4x - 5y + 16 = 0$ je rôznobežná s priamkou, ktorej parametrické vyjadrenie je

$$b: \; x = 2 - 3t$$

$$y = -4 + 2t \quad t \in R$$

a urč súradnice priesečníka.

budeme hľadať len priesečníky a podľa ich počtu určíme vzájomnú polohu

ak nejaký priesečník P existuje, označme jeho súradnice $[x_P;\ y_P]$

bod $P \in a$, preto jeho súradnice musia vyhovovať rovnici priamky a : $\quad 4x_P - 5y_P + 16 = 0$

bod $P \in b$, preto jeho súradnice musia vyhovovať rovnici priamky b : $\quad x_P = 2 - 3t$

$$y_P = -4 + 2t$$

pred našimi očami máme sústavu teraz troch rovníc s troma neznámymi , ktorú vyriešime

$$4(2 - 3t) - 5(-4 + 2t) + 16 = 0$$
$$8 - 12t + 20 - 10t + 16 = 0$$
$$-22t = -44$$
$$t = 2$$

$x_P = 2 - 3 \,.\, 2 = -4 \qquad y_P - 4 + 2 \,.\, 2 = 0$

sústava má jedno riešenie $P[-4; 0] \Rightarrow$ **priamky sú rôznobežné** $\quad a \nparallel b$

Pr. 7: Urč vzájomnú polohu priamok:

$a: 2x + y - 1 = 0$

$b: 4x + 2y - 2 = 0$

budeme hľadať len priesečníky a podľa ich počtu určíme vzájomnú polohu

ak nejaký priesečník $\boldsymbol{P}$ existuje, označme jeho súradnice $[\boldsymbol{x_P};\ \boldsymbol{y_P}]$

$$\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{a}: \quad 2\boldsymbol{x_P} + \boldsymbol{y_P} - 1 = 0 \ \ /.(-2)$$

$$\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{b}: \quad 4\boldsymbol{x_P} + 2\boldsymbol{y_P} - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

sústava má nekonečne veľa riešení ⇒ *priamky majú nekonečne veľa spoločných bodov* ⇒ **priamky sú totožné** $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q}$

Pr. 7: Urč vzájomnú polohu priamok:

$a: 2x + y - 1 = 0$

$b: 2x + y - 3 = 0$

budeme hľadať len priesečníky a podľa ich počtu určíme vzájomnú polohu

ak nejaký priesečník $\boldsymbol{P}$ existuje, označme jeho súradnice $[\boldsymbol{x_P};\ \boldsymbol{y_P}]$

$$\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{a}: \quad 2\boldsymbol{x_P} + \boldsymbol{y_P} - 1 = 0 \ \ /.(-1)$$

$$\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{b}: \quad 2\boldsymbol{x_P} + \boldsymbol{y_P} - 3 = 0$$

$$-2 \neq 0$$

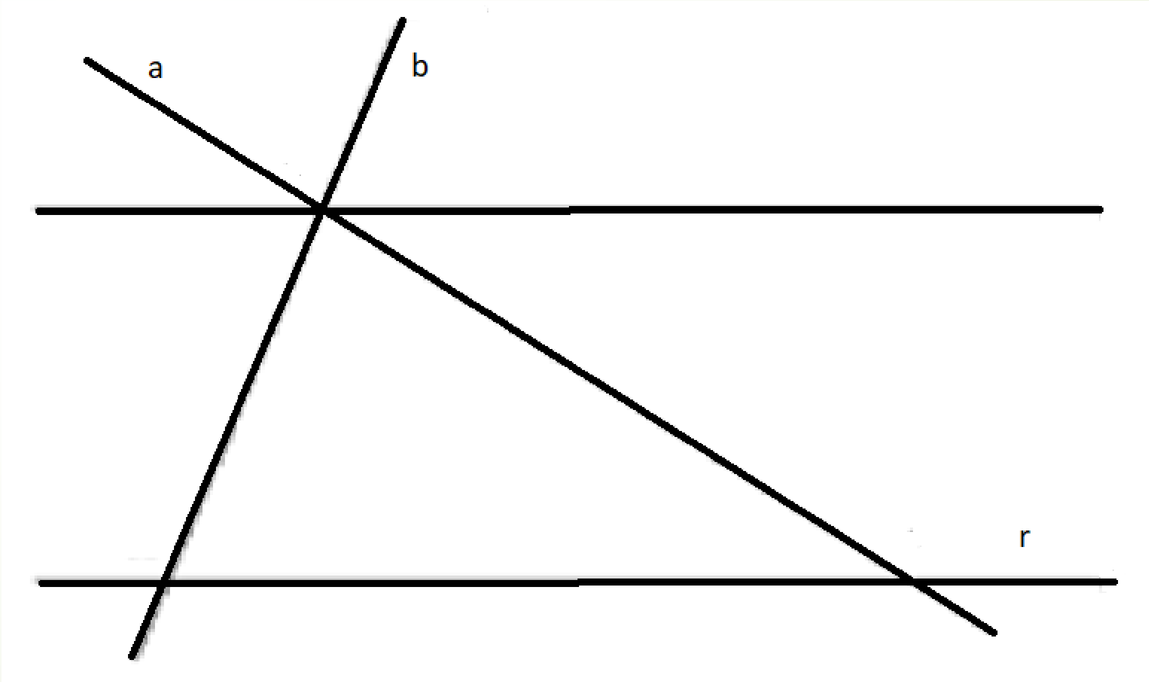
súvstava nemá riešenie $\Rightarrow$ *priamky nemajú spoločné bod*

$\Rightarrow$ **priamky sú rovnobežné** $\quad \boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$

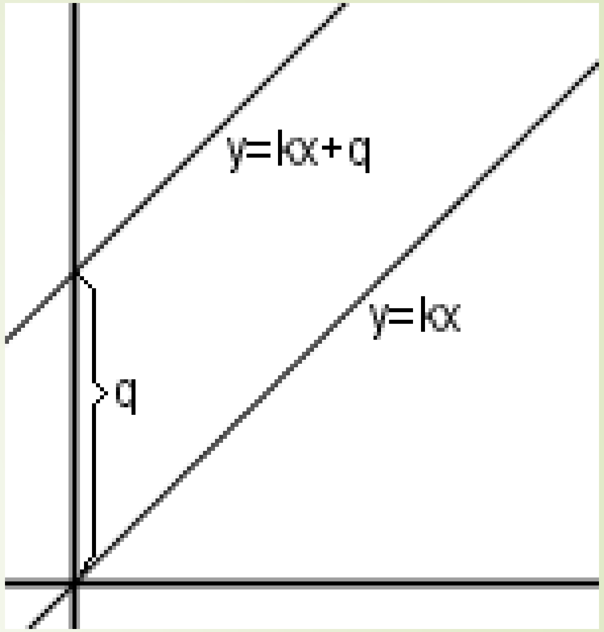
Úloha na samostatné riešenie:

Priesečníkom priamok $a\colon 3x + y - 2 = 0$ a $b\colon\ x - y - 6 = 0$ veďte rovnobežku s priamkou $r\colon\ 2x - y + 4 = 0$. Určte jej smernicovú rovnicu.

Výsledok: $y = 2x - 8$



smernice



- totožné priamky majú rovnaké smernice aj rovnaké úseky na osi y

$$k_p = k_q$$
$$q_p = q_q$$

- rovnobežné priamky majú rovnaké smernice

$$k_p = k_q$$
$$q_p \neq q_q$$

- rôznobežné priamky majú rôzne smernice aj úsek na osi y

$$k_p \neq k_q$$
$$q_p \neq q_q$$