

## 1.a Výroková logika

Vysvetli nasledujúce pojmy:

výrok, axióma, definícia, hypotéza, tvrdenie, pravdivostná hodnota, logické spojky, negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, obmena implikácie, obrátená implikácia, ekvivalencia, vyplýva, je ekvivalentné, kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve)

**Výrok** – každá oznamovacia veta, ktorá zrozumiteľne niečo oznamuje a o ktorej má po obsahovej stránke zmysel hovoriť, že je pravdivá alebo nepravdivá. Výroky sa označujú veľkými písmenami  $A, B, \dots, V, \dots Z$ .

**Axióma** – tvrdenie, ktoré sa nedokazuje, je bez pochybností pravdivé. Pomocou axióm zavádzame základné matematické pojmy.

**Definícia** – určuje názov nového pojmu a jeho charakteristické vlastnosti pomocou základných pojmov.

**Hypotéza** – oznamovacia veta, ktorá má charakter výroku, o ktorom v danom okamihu nemožno jednoznačne určiť, či je pravdivý alebo nepravdivý. Jedna z týchto podmienok však musí nastať.

**Tvrdenie** – výrok, ktorý má byť dokázaný.

**Pravdivostná hodnota** – je priradenie jednej z pravdivostných hodnôt danému výroku. Symbolicky sa značí najčastejšie číslami alebo písmenami. Pravda – 1 alebo  $p$ , nepravda – 0 alebo  $n$ .

**Logické spojky** – spojky (napr. a, alebo, ak..., potom..., je ekvivalentné, nie je pravda, že...), pomocou ktorých z jednoduchých výrokov vytvárame zložitejšie výroky. V matematických zápisoch sa používajú symboly na zápis týchto spojok: konjunktorka  $\wedge$ , disjunktorka (nevylučujúci)  $\vee$ , vylučujúci disjunktorka  $\vee\vee$ , implikátorka  $\Rightarrow$ , ekvivalentorka  $\Leftrightarrow$ .

**Zložený výrok** – výrok, ktorý vznikol použitím logických spojok.

Konjunkcia výrokov $A$ a $B$	$A \wedge B$ ( $A$ a $B$ )	Konjunkcia $A \wedge B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak $A, B$ sú obidva pravdivé výroky.
Disjunkcia výrokov $A$ a $B$	$A \vee B$ ( $A$ alebo $B$ )	Disjunkcia $A \vee B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak aspoň jeden z výrokov $A, B$ je pravdivý.
Alternatíva výrokov $A$ a $B$	$A \vee\vee B$ (Bud' $A$ alebo $B$ )	Alternatíva (ostrá disjunkcia) $A \vee\vee B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak práve jeden z výrokov $A, B$ je pravdivý.
Implikácia výrokov $A$ a $B$	$A \Rightarrow B$ (Ak $A$ , tak $B$ )	Implikácia $A \Rightarrow B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak nenastane situácia, že výrok $A$ je pravdivý a súčasne výrok $B$ je nepravdivý.
Ekvivalencia výrokov $A$ a $B$	$A \Leftrightarrow B$ ( $A$ práve vtedy, keď $B$ )	Ekvivalencia $A \Leftrightarrow B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak výroky $A, B$ majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. Výroky $A, B$ sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$ .

**Negácia výroku** – je výrok utvorený z daného výroku popierajúci jeho pravdivosť. Negáciu výroku  $A$  budeme označovať ako  $A'$  alebo  $\neg A$ . Negáciu výroku  $A$  tvoríme obvykle takto: Nie je pravda, že  $A$ , alebo k slovesnému tvaru pridáme zápor ne-.

**Obmena implikácie** – z implikácie  $A \Rightarrow B$  ju vytvoríme tak, že vymeníme poradie výrokov  $A$  a  $B$  a každý znegujeme:  $B' \Rightarrow A'$ . Implikácia a obmenená implikácia majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.

**Obrátená implikácia** – z implikácie  $A \Rightarrow B$  ju vytvoríme tak, že vymeníme poradie výrokov  $A$  a  $B$ :  $B \Rightarrow A$ . Implikácia a obrátená implikácia nemusia mať rovnakú pravdivostnú hodnotu.

**Tabuľka pravdivostných hodnôt negácie a zložených výrokov:**

A	B	$B'(\neg B)$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \vee\vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Výraz zostavený z výrokových premenných, zátvoriek a logických spojok tak, že po dosadení ľubovoľných výrokov za výrokové premenné dostaneme výrok, sa v logike nazýva **výroková forma**.

Výroková forma, ktorá nadobúda hodnotu „pravda“ pri všetkých kombináciách pravdivostných hodnôt svojich premenných sa nazýva **tautológia**.

Výroková forma, ktoré nadobúda hodnotu „nepravda“ pri všetkých kombináciách pravdivostných hodnôt svojich premenných sa nazývajú **kontradikcia**.

**Splniteľná výroková forma** je výroková forma, ktorá aspoň pre jednu kombináciu pravdivostných hodnôt svojich premenných nadobúda hodnotu „pravda“ a aspoň pre jednu kombináciu pravdivostných hodnôt nadobúda hodnotu „nepravda“.

Pravdivostné hodnoty výrokovej formy zisťujeme spravidla pomocou tabuľky s vhodným záhlavím, kde v jednotlivých stĺpcoch budú čiastkové výroky a ich pravdivostné hodnoty.

**Negácia zložených výrokov (de Morganove pravidlá):**

$(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$	$(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow A \wedge B'$
$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$	$(A \Leftrightarrow B)' \Leftrightarrow (A \wedge B') \vee (A' \wedge B)$

**Jednoduché kvantifikované výroky** – za kvantifikované výroky považujeme tie oznamovacie vety, ktoré udávajú presný počet alebo určitý odhad počtu predmetov, osôb a pod., ktoré majú uvedenú vlastnosť.

**Kvantifikátor** – slovo alebo krátke slovné spojenie, ktoré vyjadruje vo vete údaj o počte objektov, osôb a podobne. Je to číslovka a slová, resp. slovné spojenie: žiadny, každý, práve jeden, existuje aspoň jedno,...

**Všeobecný (veľký) kvantifikátor  $\forall$**  – vyjadruje, že každý uvažovaný objekt má alebo žiadny nemá vlastnosť, o ktorú ide. Okrem slov „každý, žiadny“ sa na tento účel používajú aj slová „všetky, ľubovoľný, ktorýkoľvek, ani jeden“ a pod.

**Existenčný (malý) kvantifikátor  $\exists$**  – vyjadruje, že aspoň jeden uvažovaný objekt má alebo nemá vlastnosť, o ktorú ide. Okrem slov „aspoň jeden“ sa používajú slová „niektorý, možno nájsť, existuje“ a pod.

**Negovanie kvantifikovaných výrokov** – možno uskutočniť predradením slov „Nie je pravda, že...“ výroku, ktorý negujeme. Stručnejšie negáciu výroku častejšie formulujeme tak, že zmeníme kvantifikátor.

Výrok	Negácia výroku
aspoň n... je...	najviac n-1... je...
najviac n... je...	aspoň n+1... je...
práve n... je...	najviac n-1 alebo aspoň n+1... je...
každý... je...	aspoň jeden... nie je...
aspoň jeden... je...	ani jeden... nie je...

### Príklady:

- Dané sú vety. Určte, ktorá je výrok, výroková forma, hypotéza, kvantifikovaný výrok.
  - Graf funkcie  $f: y = 2x^2$  prechádza bodom  $X[1; 2]$ .
  - Otec osôb a, b.
  - x je synom y.
  - $\forall x \in R: x^2 > 4$
  - $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$
  - Číslo 5 vyhovuje rovnici  $x + 7 = 12$ .
  - $x + 7 = 12$
  - Riešte v  $Z$  rovnicu!
  - Mám ostrý nôž.
  - Susedné strany pravouholníka sú zhodné.
  - Na Marse existuje život.
  - $\exists x \in R$  tak, že  $x^3 = 8$ .
  - $6x - 2 \leq 9$
- Vytvorte negáciu výrokov (bez použitia: „Nie je pravda, že...“)
  - Každý trojuholník má jeden tupý uhol.
  - Aspoň jedno prirodzené číslo je menšie ako 6.
  - Žiadne prvočíslo nie je párne.
  - Mám najviac troch kamarátov.
  - Prší.
  - Každý mlčal.
  - $\forall x \in R: |x| > 0$
  - $\exists x \in R: x^2 = 0$
  - Mám jednu sestru a jedného brata.
  - Kvadratická rovnica nemá koreň, alebo má dva korene.
  - Keď nehovorím, pracujem.
  - Na futbal pôjdem práve vtedy, keď nebude pršať.
  - Nikto neodišiel.

3. Dané sú výroky:  $A$ : V sobotu pôjdeme do lesa.  $B$ : V nedeľu pôjdeme na návštevu.  
Z výrokov  $A$  a  $B$  utvorte:
- Negáciu
  - Konjunkciu
  - Disjunkciu
  - Alternatívu
  - Implikáciu
  - Ekvivalenciu
4. Dané sú výroky:  $X$ : Kúpim mäso.  $Y$ : Budem robiť rezne. Z výrokov  $X$  a  $Y$  utvorte:
- Implikáciu
  - Obrátenú implikáciu
  - Obmenenú implikáciu
  - Negáciu implikácie
5. Určte pravdivostnú hodnotu daných výrokov:
- $(-5 < -4 < -2) \Leftrightarrow 15 \leq 8$
  - $(0,5 \leq 2) \Rightarrow (2 \mid 13 \vee 2 \mid 12)$
  - $[\sqrt{25} = -5 \wedge (-5)^2 = 25] \Leftrightarrow [(2 \neq 8 \vee 3 \mid 9) \Rightarrow 5 \leq 9]$
  - $\forall x \in R: x^2 \geq 0$
6. Určte, či je daný výrok tautológia. Ak nie, určte jeho typ:
- $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [(A \wedge C') \Rightarrow B']$
  - $A \Leftrightarrow [A' \Rightarrow (B \wedge B')]$
  - $[(A \Rightarrow B) \wedge A'] \vee (B \Rightarrow A)$
  - $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge B)]$
  - $(A \wedge B') \Rightarrow (A' \wedge B')$
  - $[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)]$
7. Ak dostane Peter lístky na zápas, pôjde s ním Pavol. Peter však lístky nedostal. Vyplýva z toho, že Pavol nie je na zápase?
8. Ak kúpi Jana lístky, pôjde s ňou Eva do kina. Evu sme stretli v kine. Vyplýva z toho, že Jana kúpila lístky?
9. Rodina Cestovateľov sa rozhoduje o tom, kde pôjdu tento rok na dovolenku. Členovia rodiny navrhovali. Matka: Ja som za Španielsko alebo Taliansko. Syn: Ja som za Nórsko alebo Španielsko. Dcéra: Ja som za Nórsko alebo Taliansko. Otec chcel vyhovieť všetkým a preto navštívili všetky tri štáty. Splnil skutočne ich želania? Museli navštíviť tri štáty, aby im vyhovel?
10. Spolužiačky Oľga, Petra, Radka, Slávka a Táňa boli pozvané na oslavu Janiných narodenín. Sľúbili, že prídu, a ich účasť na oslave možno vyjadriť výroky: Príde Oľga a príde aj Petra. Príde Petra, alebo príde Táňa. Ak príde Táňa, tak príde aj Radka. Slávka príde vtedy, ak príde