VŠEOBECNÁ ROVNICA PRIAMKY

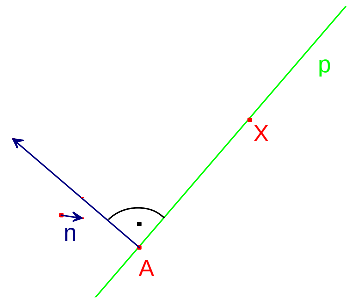
Iný spôsob určenia smeru priamky je pomocou vektora, ktorý je na priamku kolmý (normálového vektora priamky).

Označme:

$X[x;y]$ ... ľubovoľný bod priamky p

$A[x_0;y_0]$ ... bod, ktorým je priamka určená

$\vec{n}=(a;b)$ ... normálový vektor priamky (kolmý na priamku)



Hľadáme vzťah, pomocou ktorého určíme súradnice každého bodu X priamky p.

$$\overrightarrow{AX}=X-A=(x-x_0\,;\,y-y_0)$$

Vektory $\vec{n}$ a $\overrightarrow{AX}$ sú na seba kolmé, teda ich skalárny súčin sa rovná nule.

$$a.(x-x_0)+b.(y-y_0)=0$$
$$ax-ax_0+by-by_0=0$$
$$ax+by+(-ax_0-by_0)=0 \qquad označme \quad (-ax_0-by_0)=c$$

Všeobecná rovnica priamky: $ax+by+c=0$**,**
kde $a,b,c\in R$ a $\vec{n}=(a;b)$ je normálový vektor priamky

Napríklad: p: $3x-y+5=0$

Príklad 1

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky p, ktorá prechádza bodom $A[-6;2]$ a je kolmá na vektor $\vec{n}=(1;-3)$

Riešenie:

Všeobecná rovnica každej priamky je: $ax+by+c=0$

Normálový vektor priamky p je $\vec{n}=(1;-3)$

Do rovnice dosadíme za a = 1; b = –3

p: 1x – 3y + c = 0 Teraz za x a y dosadíme súradnice bodu A a vypočítame c:

1.(–6) – 3. 2 + c = 0

$-6-6 \quad + \ c \ = 0$
$-12 + c \ = 0$
$c = 12$

Výsledok: Priamka p má rovnicu:

$\boxed{p:\ x-3y+12=0}$

Príklad 2

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky p, ktorá prechádza bodmi $A[-1;4]$ a $B[2;6]$.

Riešenie:

Nájdeme smerový vektor tejto priamky ... $\overrightarrow{AB}$. Potom k nemu nájdeme vektor, ktorý je naňho kolmý To bude normálový vektor tejto priamky a pokračujeme tak ako v predchádzajúcom príklade **1**.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = \left(2-(-1)\,;\,6-4\right) = (3;2)$$
$$\vec{n} = (-2;3)$$

p: $-2x + 3y + c = 0$
$-2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 + c = 0$
$2 + 12 + c = 0$
$14 + c = 0$
$c = -14$

Príklad 3

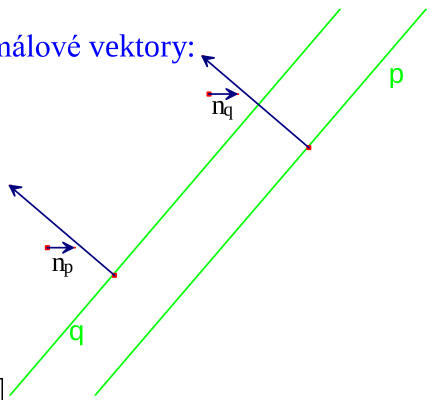
Napíšte všeobecnú rovnicu priamky q, ktorá prechádza bodom $A[-2;6]$ a je rovnobežná s priamkou p: $3x - 2y + 1 = 0$

Riešenie:

Keďže priamky p a q sú rovnobežné, majú rovnaké normálové vektory:

$\overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{n_q} = (3;-2)$

Priamka q má rovnicu: q: $3x - 2y + c = 0$
$3 \cdot (-2) - 2 \cdot 6 + c = 0$
$-6 - 12 + c = 0$
$-18 + c = 0$
$c = 18$

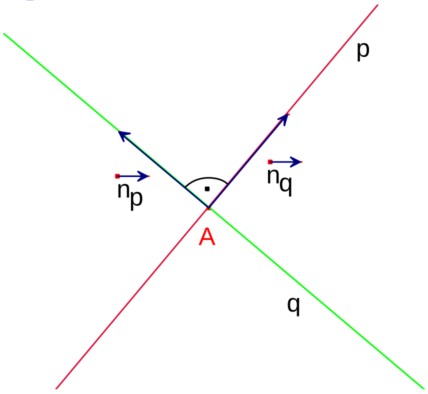


Výsledok: Priamka q má rovnicu: $\boxed{q:\ 3x-2y+18=0}$

Príklad 4

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky q, ktorá prechádza bodom $A[5;-2]$ a je kolmá na priamku p: 2x – 3y + 4 = 0

Riešenie:
Keďže priamky p a q sú na seba kolmé, ich normálové vektory sú tiež na seba kolmé. Poznáme normálový vektor priamky p, určíme normálový vektor priamky q. Ďalej postupujeme tak ako v príklade **1**.



$\vec{n}_p = (\,2\,;-3\,)$

$\vec{n}_q = (\,3\,;\;\;2\,)$

q : 3x + 2y + c = 0
3 . 5 + 2 . 2 + c = 0
15 + 4 + c = 0
c = –19

Výsledok: Priamka q má rovnicu: $\boxed{q:\;\;3x+2y-19=0}$

Príklad 5
Nájdite dva body K a L, ktoré ležia na priamke p: x – 2y – 7 = 0

Riešenie:
V rovnici si jednu súradnicu zvolíme a druhú dopočítame. V tomto príklade je výhodné zvoliť y a dopočítať x.
Napríklad:

$K[\;\;;3\,]$	$L[\;\;;-1\,]$
x – 2 . 3 – 7 = 0	x – 2 . (–1) – 7 = 0
x – 6 – 7 = 0	x + 2 – 7 = 0
x = 13	x = 5

Výsledok: $\boxed{K[\,13\;;3\,]}$ $\boxed{L[\,5\;;-1\,]}$

Príklad 6
Zistite, či body $M[\,1;-3\,]$ a $N[\,-2\,;5\,]$ ležia na priamke p: 3x + y + 1 = 0

Riešenie:
Súradnice bodu dosadíme do rovnice priamky. Ak je hodnota ľavej strany rovná nule, bod leží na priamke, v opačnom prípade bod na priamke neleží.

$M[\,1;-3\,]$

3 . 1 + (–3) + 1 = 3 – 3 + 1 = 1 ≠ 0 => M ∉ p

$N[\,-2\,;5\,]$

3 . (–2) + 5 + 1 = –6 + 5 + 1 = 0 = 0 => N ∈ p

Príklad 7

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky $p: x = 2 - 3t$

$y = -1 + 5t$

Riešenie:

Z dvoch parametrických rovníc chceme dostať jednu rovnicu, v ktorej bude x, y a nebude t. Rovnice upravíme tak, aby po sčítaní ľavých a pravých strán parameter t vypadol.

$p: x = 2 - 3t \quad / \,.\, 5$

$y = -1 + 5t \quad / \,.\, 3$

$5x = 10 - 15t$

$3y = -3 + 15t$

5x + 3y = 7 / –7

Výsledok: Priamka p má všeobecnú rovnicu $\boxed{p: 5x + 3y - 7 = 0}$

Príklad 8

Napíšte parametrické rovnice priamky p : 5x + 4y – 2 = 0

Na určenie parametrických rovníc priamky potrebujeme poznať jeden jej bod a smerový vektor. Bod priamky dostaneme tak ako v príklade **5**, smerový vektor priamky tak, ako v príklade **4.**

A ∈ p

A$[\,2\,;\quad]$

5 . 2 + 4y – 2 = 0

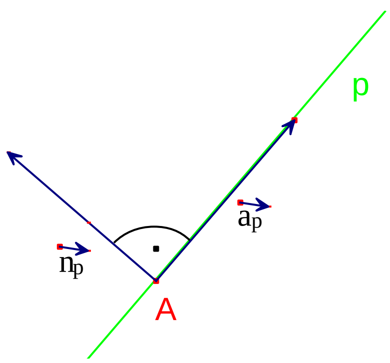
10 + 4y – 2 = 0

8 + 4y = 0 / –8

4y = –8 / : 4

y = –2

A$[\,2\,;-2\,]$



$\vec{n}_p = (\,5\,;4\,)$

$\vec{a}_p = (\,4\,;-5\,)$

Výsledok: $\boxed{\begin{aligned} p:\ x &= 2 + 4t \\ y &= -2 - 5t \end{aligned}}$

CVIČENIE

1) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá:

a) prechádza bodom $A[3;2]$ a je kolmá na vektor $\vec{n}=(7;6)$

b) prechádza bodom $K[4;-3]$ a je kolmá na vektor $\vec{n}=(-3;5)$

c) prechádza bodom $T[-6;-3]$ a je kolmá na vektor $\vec{n}=(-5;2)$

d) prechádza bodom $Z[0;2]$ a je kolmá na vektor $\vec{n}=(-1;1)$

2) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodmi:

a) $A[-1;1]\ a\ B[2;-5]$

b) $K[-2;5]\ a\ L[-3;-1]$

c) $M[1;-4]\ a\ N[-3;0]$

d) $C[0;0]\ a\ D[4;4]$

3) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky q, ktorá:

a) prechádza bodom $A[2;-6]$ a je rovnobežná s priamkou p: $2x - 3y + 8 = 0$

b) prechádza bodom $A[4;-7]$ a je rovnobežná s priamkou p: $x + 4y + 5 = 0$

c) prechádza bodom $A[-5;0]$ a je rovnobežná s priamkou p: $2x - y + 1 = 0$

d) prechádza bodom $A[9;2]$ a je rovnobežná s priamkou p: $x - y + 4 = 0$

4) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky q, ktorá:

a) prechádza bodom $A[3;-1]$ a je kolmá na priamku p: $4x + 3y + 2 = 0$

b) prechádza bodom $A[3;2]$ a je kolmá na priamku p: $x - 2y + 5 = 0$

c) prechádza bodom $A[9;-8]$ a je kolmá na priamku p: $3x - 8y - 1 = 0$

d) prechádza bodom $A[-4;-3]$ a je kolmá na priamku p: $5x + y + 4 = 0$

5) Nájdite dva body K a L, ktoré ležia na priamke:

a) p: $x - 6y + 3 = 0$
b) p: $2x - 3y - 4 = 0$
c) p: $5x + 7y = 0$
d) p: $8x + y - 10 = 0$

6) Zistite, či body $M[\ 2;5\ ]\ a\ N[\ -3;4\ ]$ ležia na priamke:

a) p: $x - y + 3 = 0$
b) p: $3x + 2y + 1 = 0$
c) p: $2x - y + 1 = 0$
d) p: $x + y - 1 = 0$

7) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky:

a) $p: x = 3 - 2t$
$y = 2 + 4t$

b) $p: x = 1 + 2t$
$y = -7 + t$

c) $p: x = -3 - 9t$
$y = 4t$

d) $p: x = t$
$y = 2 + t$

8) Napíšte parametrické rovnice priamky:

a) $p: 4x - 2y - 5 = 0$
b) $p: x + 3y + 3 = 0$
c) $p: 7x - 6y - 2 = 0$
d) $p: 5x + y + 6 = 0$