Uhol vektorov. Skalárne násobenie vektorov

Definícia : Ak **u** = AB a **v** = AC, tak konvexný uhol BAC (< 180°) nazývame **uhol vektorov u a v** (ozn. φ). Uhol nie je definovaný, ak aspoň jeden z vektorov je nulový. Ak **u** a **v** sú nenulové vektory, ktoré zvierajú uhol φ, tak **skalárnym súčinom nazývame číslo**

$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,.\,|\mathbf{v}|\,.\cos\varphi.$$

Ak aspoň jeden z vektorov je nulový, tak ich skalárny súčin je 0.

Poznámka:
Skalárny súčin vektorov je jediná operácia s vektormi, kde výsledkom nie je vektor ale skalár (konštanta).
Skalár (slovník c. slov) je veličina dostatočne určená svojou číselnou hodnotou (čas, dĺžka, objem, energia a pod.); je to opak vektora.

VETA (o skalárnom súčine) : V ortonormálnej sústave súradníc **v rovine** pre každé dva vektory $\mathbf{u}[u_1,u_2]$ a $\mathbf{v}[v_1,v_2]$ platí :

$$\mathbf{u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2}.$$

V ortonormálnej sústave súradníc **v priestore** pre každé 2 vektory $\mathbf{u}[u_1,u_2,u_3]$ a $\mathbf{v}[v_1,v_2,v_3]$ platí :

$$\mathbf{u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}\ .$$

Dôkaz (v rovine) :
Podľa kosínusovej vety : $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\varphi$

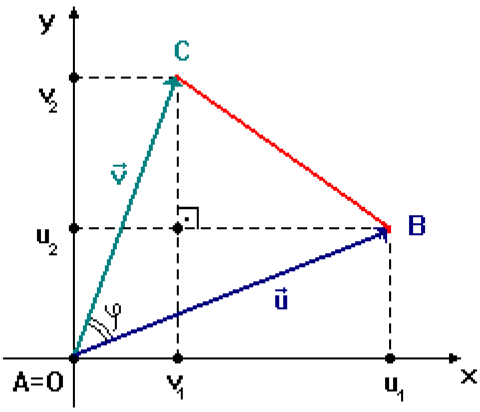
$$|BC|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \underbrace{-2.|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos\varphi}_{-2.\mathbf{u.v}}$$

$$\mathbf{u.v} = \tfrac{1}{2}(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |BC|^2)$$

Po dosadení súradníc :

$$\mathbf{u.v} = \tfrac{1}{2}[\,u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2]$$

Po úprave : $\mathbf{u.v} = u_1.v_1 + u_2.v_2$



Použitie skalárneho súčinu :

VETA (o uhle vektorov) :
Pre veľkosť uhla φ nenulových vektorov **u** a **v** platí : $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{u\,.\,v}}{|\mathbf{u}|\,.\,|\mathbf{v}|}$

Dôsledok : nenulové **vektory u a v sú na seba kolmé práve vtedy, keď u.v = 0**.

Z definície skalárneho súčinu a z vlastností funkcie kosínus vyplýva:

- u.v > 0 práve vtedy, ak uhol vektorov u a v je **ostrý.**
- u.v = 0 práve vtedy, ak uhol vektorov u a v je **pravý.**
- u.v < 0 práve vtedy, ak uhol vektorov u a v je **tupý.**