Orientované úsečky

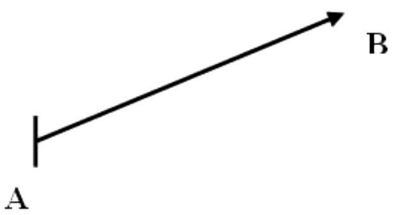
Vypracovala: PaedDr. Elena Šimová

S pojmom orientovaná úsečka sme sa stretli okrem matematiky i na fyzike, kde predstavuje vektorové fyzikálne veličiny, na ktorých určenie treba poznať nielen ich veľkosť, ale i smer.

Orientovanú úsečku **označujeme $\overrightarrow{AB}$ (v literatúre len tučným písmom)**.

Úsečka AB je množina všetkých bodov, ktoré ležia na priamke medzi dvomi bodmi A a B, vrátane nich.

DEF: Orientovaná úsečka *AB* je úsečka AB, ktorej krajné body A a B majú určené poradie. Bod **A** nazývame **počiatočný bod** (začiatočný bod, začiatok),
bod **B** nazývame **koncový bod** (koniec).



Nulová orientovaná úsečka AA má začiatočný a koncový bod totožný, teda A.

DEF: Veľkosť orientovanej úsečky AB nazývame veľkosť $|AB|$ úsečky AB (pri zvolenej jednotkovej úsečke). **Nulovej orientovanej úsečke** priraďujeme veľkosť **nula**. **Veľkosť úsečky AB** je nezáporné reálne číslo, ktoré vyjadruje akým násobkom zvolenej jednotkovej úsečky je úsečka AB.

Pozn.: Veľkosť orientovanej úsečky AB môžeme vypočítať ako **vzdialenosť bodov A, B v danej súradnicovej sústave.**

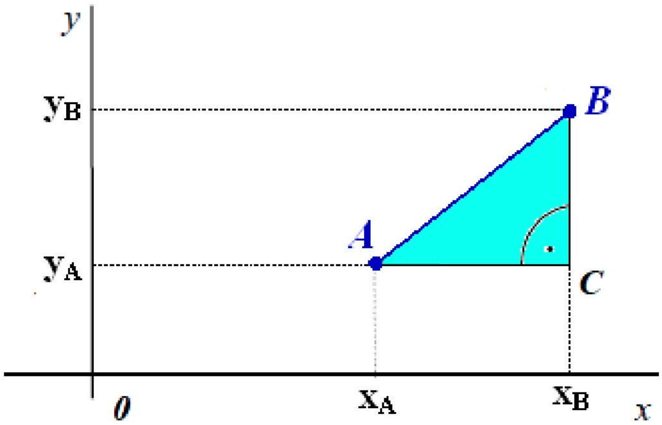
Vzdialenosť dvoch bodov na priamke

Vzdialenosť dvoch bodov $A=[x_A]$, $B=[x_B]$ na číselnej osi sa rovná absolútnej hodnote rozdielu reálnych čísel x_A a x_B , t.j. rozdielu ich súradníc:

$$|A, B| = |AB| = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2} \qquad (1)$$

Vzdialenosť dvoch bodov v rovine

Vzdialenosť dvoch bodov $A=[x_A; y_A]$, $B=[x_B; y_B]$ v rovine určíme ako veľkosť prepony pravouhlého trojuholníka ABC:



$|AC| = |x_B - x_A|$, $|BC| = |y_B - y_A|$

$$|A, B| = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad (2)$$

Príklad 3: Vypočítajte vzdialenosť bodov $P = [-3; 2]$, $Q = [-7; -1]$

Riešenie: $|P, Q| = \sqrt{(-3+7)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \mathbf{5\ j}$.

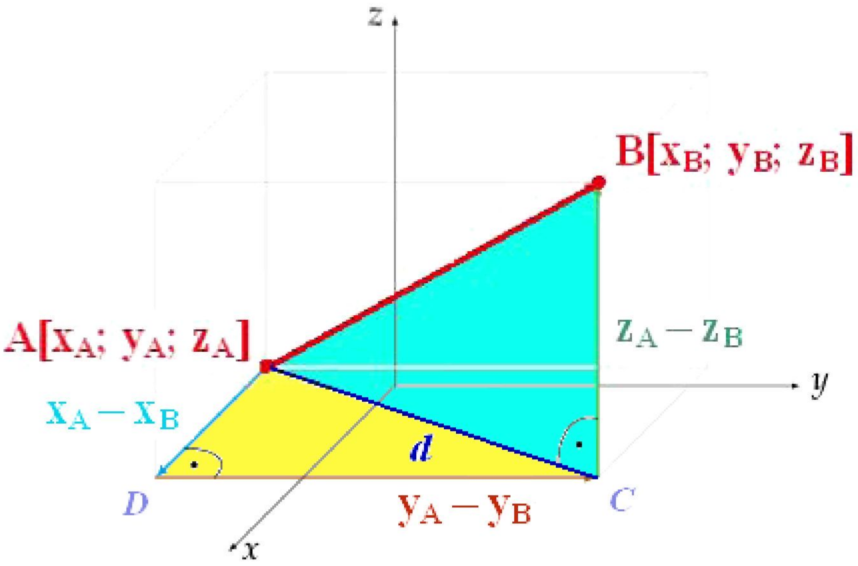
Vzdialenosť dvoch bodov v priestore

Vzdialenosť dvoch bodov $A=[x_A; y_A; z_A]$, $B=[x_B; y_B; z_B]$ v rovine určíme ako veľkosť prepony pravouhlého trojuholníka ABC s využitím pravouhlého trojuholníka ACD:

ΔACD: $d^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$

ΔABC: $|AB|^2 = d^2 + (z_A - z_B)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 \Rightarrow$

$$|A, B| = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_A - z_B)^2} \qquad (3)$$



Príklad 4: Určte, či ΔABC s vrcholmi $A = [-1; 5; 1]$, $B = [3; -2; -1]$ a $C = [-3; 2; 1]$ je pravouhlý.

Riešenie:

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + (-2-5)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{69}$$

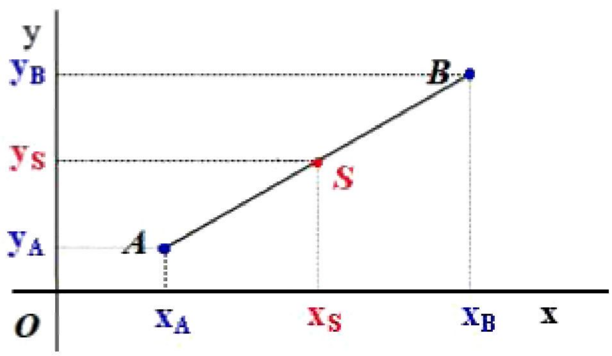
$$|\mathbf{BC}| = \sqrt{(-3-3)^2 + (2+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{56}$$

$$|\mathbf{AC}| = \sqrt{(-3+1)^2 + (2-5)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{13}\,,$$

... **56 + 13 = 69** ⇒ ΔABC je pravouhlý

Stred úsečky

Bod **S** je ***stredom úsečky AB*** práve vtedy, ak platí $|\mathbf{AS}| = |\mathbf{BS}|$



Pre súradnice bodu S platí: $\mathbf{x_S} = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ a $\mathbf{y_S} = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Podobným spôsobom v trojrozmernom priestore platí: $\mathbf{z_S} = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Záver: Pre súradnice ***stredu úsečky AB*** v rovine platí: $\mathbf{S} = \left[\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right]$ **(4)**

Pre súradnice ***stredu úsečky AB*** v priestore platí: $\mathbf{S} = \left[\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right]$ **(5)**

Symbolický zápis: $\mathbf{S = A \dotplus B}$ alebo $S = \frac{A+B}{2}$

Príklad 5: Vypočítajte súradnice stredu S úsečky AB, ak $A = [3; 1; -2]$, $B = [-1; 3; -4]$

Riešenie: $S = \left[\frac{3-1}{2}; \frac{1+3}{2}; \frac{-2-4}{2}\right] = [1; 2; -3]$

Trocha matematickej „fantázie“:

Na základe výsledkov (1) až (5) môžeme predpokladať, že pre body v ľubovoľnom ***n-rozmernom*** priestore, kde $n \in N$ platí:

$$\mathbf{A=[a_1; a_2; a_3; ...; a_n] \wedge B=[b_1; b_2; b_3; ...; b_n] \Rightarrow}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{A, B}| = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{S = A \dotplus B} = \left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}; \frac{a_3+b_3}{2}; \ldots; \frac{a_n+b_n}{2}\right]$$

Krása tej fantázie je v tom, že ***tie vzťahy sú pravdivé*** a na základe nich dokážeme vypočítať ***dĺžku úsečky*** alebo ***súradnice jej stredu*** napriek tomu, že si tú úsečku nedokážeme v 3-rozmernom priestore ani predstaviť, pokiaľ to budeme počítať pre $\mathbf{n \geq 4}$.

A práve aj v takýchto záveroch sa skrýva

KRÁSA MATEMATIKY

Úlohy :

1. V akom vzťahu sú obrazy bodov K=[1; –3] , L=[–1; –3] , M=[–1; 3] , N=[1; 3] ?
2. V O_{xyz} zobrazte body P[1; 2; 3] , Q[1; 2; –3] , R[1; –2; 3]
3. Vypočítajte vzdialenosť bodov: a) K=[3] , L=[–7]

   b) L=[–1; 1] , M=[12; –5] , N=[–4; 0] od bodu O=[0; 0] a určte obvod ΔLMN

   c) P[0; –2; 1] , Q[3; 4; 1]
4. Určte súradnice bodu B tak, aby bod S=[2; 3] bol stredom úsečky AB, ak A=[3,5; –2] .
5. Vypočítajte súradnice stredu úsečky AB: a) A[3; –1; 6] , B[5; 1; –8]

   b) A[2; –4; 6] , B[–2; 2; –6]