OPERÁCIE S VEKTORMI

Opakovanie

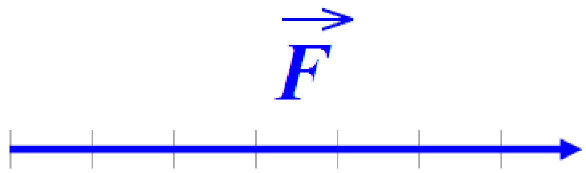
Vektory zapisujeme nasledovne:

a) pomocou písmena, nad ktorým je šípka: $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ $\vec{d}$ $\vec{v}$
b) pomocou hrubo vyznačených písmen (hlavne v tlačenom texte): **a** **b** **c** **d** **v**

Veľkosť vektora zapisujeme pomocou absolútnej hodnoty alebo pomocou písmena bez šípky a je určená veľkosťou ľubovoľnej orientovanej úsečky, ktorá je jeho umiestnením.

Napr. zápis $|\vec{v}| = v = 7$ čítame „ veľkosť vektora vé sa rovná 7 “ .

Grafické znázornenie vektorov
Vektor možno graficky zakresliť pomocou orientovanej úsečky (úsečky so šípkou).



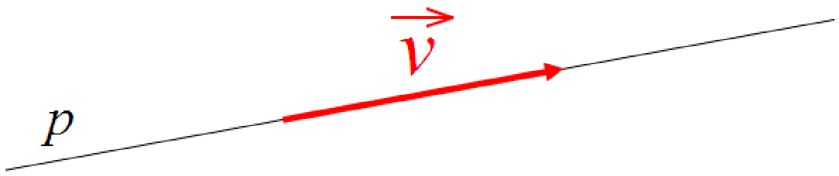
1 dielik $\hat{=}$ 1 dĺžkovej jednotke $|\vec{F}| = F = 7$

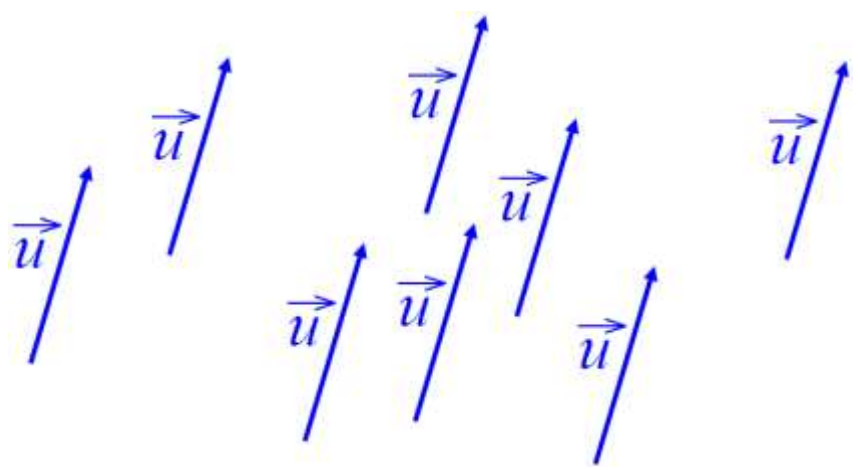
Vektor $\vec{F}$ má veľkosť 7, smer vektora $\vec{F}$ je daný orientovanou úsečkou.

Nulový vektor je vektor, ktorého veľkosť je 0, zapisujeme $\vec{0}$ alebo **0**.
Nulový vektor nemá smer, graficky ho nemožno zakresliť.

Rovnosť vektorov
Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ sa rovnajú, ak majú rovnakú veľkosť a rovnaký smer. Zapisujeme $\vec{a} = \vec{b}$.

Vektorová priamka vektora je priamka preložená začiatočným a koncovým bodom daného vektora, je to priamka, na ktorej vektor leží.





Poznámka: Vektor môžeme ľubovoľne premiestniť (po jeho vektorovej priamke aj po všetkých rovnobežkách), ale nesmieme zmeniť jeho smer a veľkosť.

Na obrázku sú znázornené rôzne umiestnenia toho istého vektora $\vec{u}$.

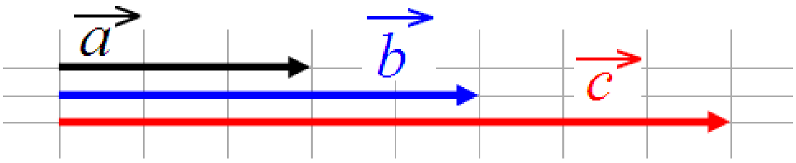
Operácie s vektormi

Podobne ako s <u>číslami</u> možno vykonávať isté <u>číselné operácie</u> (sčítať, odčítať, násobiť, deliť, ...),
aj s <u>vektormi</u> možno vykonávať <u>**vektorové operácie**</u>:
A) súčet vektorov
B) reálny násobok vektora
C) rozdiel vektorov
D) skalárny súčin vektorov
E) vektorový súčin vektorov

<u>A) Súčet vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$</u> – je vektor $\vec{a} + \vec{b}$, ktorý vznikne ako súčet ich umiestnení (orientovaných úsečiek) s rovnakým začiatkom

- súčet vektorov nazývame tiež **skladanie** vektorov (alebo sčítavanie vektorov)
- súčet (skladanie) vektorov je iná operácia ako súčet čísel vyjadrujúcich dĺžku vektoro
- výsledkom skladania 2 vektorov je vektor

A 1) ***súčet 2 vektorov súhlasného smeru***

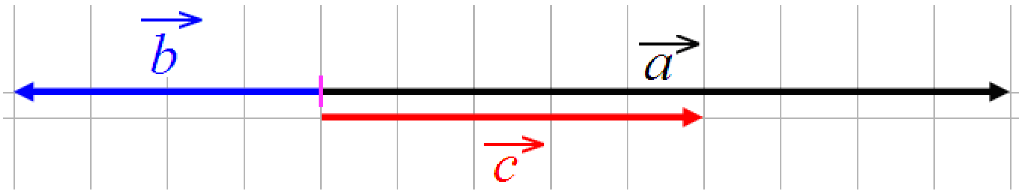


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

- výsledný vektor má smer oboch vektorov a jeho veľkosť sa rovná súčtu veľkostí oboch vektorov

A 2) ***súčet 2 vektorov opačného smeru***

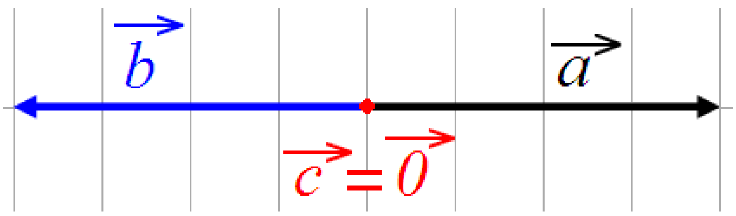


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$|\vec{c}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$

- výsledný vektor má smer väčšieho vektora a jeho veľkosť sa rovná rozdielu veľkostí oboch vektorov

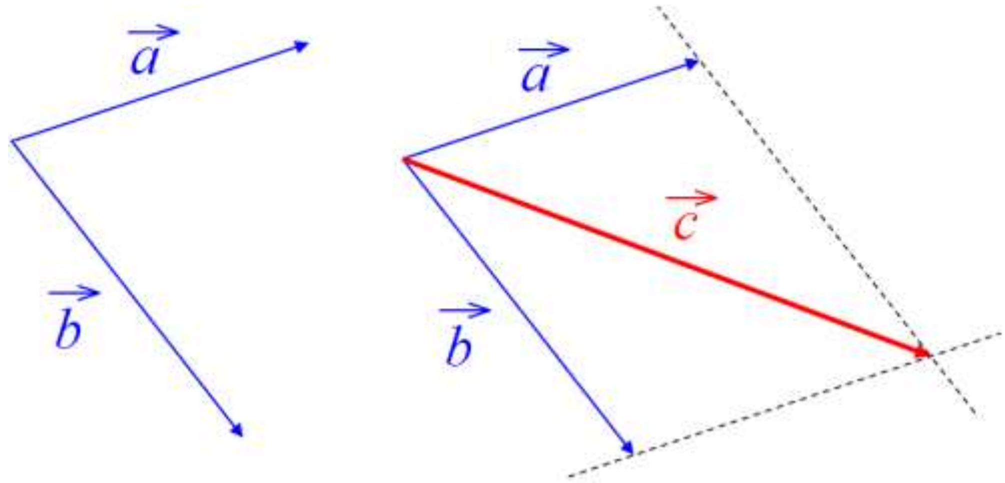
- špeciálnym prípadom skladania 2 vektorov opačného smeru je skladanie dvoch rovnako veľkých vektorov opačného smeru, kedy je ich výsledný vektor nulový



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

$|\vec{c}| = |\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}| = 0$

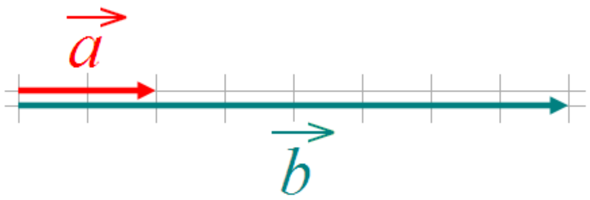
A 3) ***skladanie 2 vektorov rôzneho smeru***
- výsledný vektor nájdeme tak, že obrazec doplníme do rovnobežníka a výsledným vektorom je orientovaná uhlopriečka tohto rovnobežníka



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

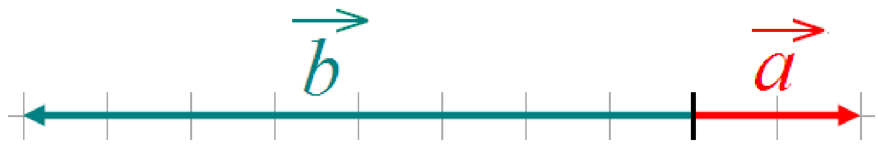
<u>**B) reálny násobok vektora $\vec{a}$**</u> - je vektor $\overrightarrow{k.a}$ (kde k je reálne číslo), ktorý vznikne ako reálny násobok ľubovoľného umiestnenia (orientovanej úsečky) tohto vektora

B 1) *násobenie vektora kladným reálnym číslom*
- ak vynásobíme vektor kladným reálnym číslom *k*, dostaneme vektor, ktorý má rovnaký smer a jeho veľkosť sa rovná *k* násobku veľkosti daného vektora.



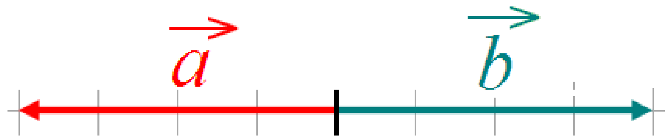
$$\vec{b} = 4 . \vec{a} \; ; \quad |\vec{b}| = 4 . |\vec{a}|$$

B 2) *násobenie vektora záporným reálnym číslom*
- ak vynásobíme vektor záporným reálnym číslom *k*, dostaneme vektor, ktorý má opačný smer a jeho veľkosť sa rovná $|k|$ násobku veľkosti daného vektora.



$$\vec{b} = (-4) . \vec{a} \; ;$$
$$|\vec{b}| = |-4| . |\vec{a}| = 4 . |\vec{a}|$$

- ak vynásobíme vektor číslom (- 1), dostaneme opačný vektor
Opačný vektor k danému vektoru je taký vektor, ktorý má rovnakú veľkosť, ale opačný smer.



$$\vec{b} = (-1) . \vec{a} = -\vec{a}$$

<u>Poznámka:</u>

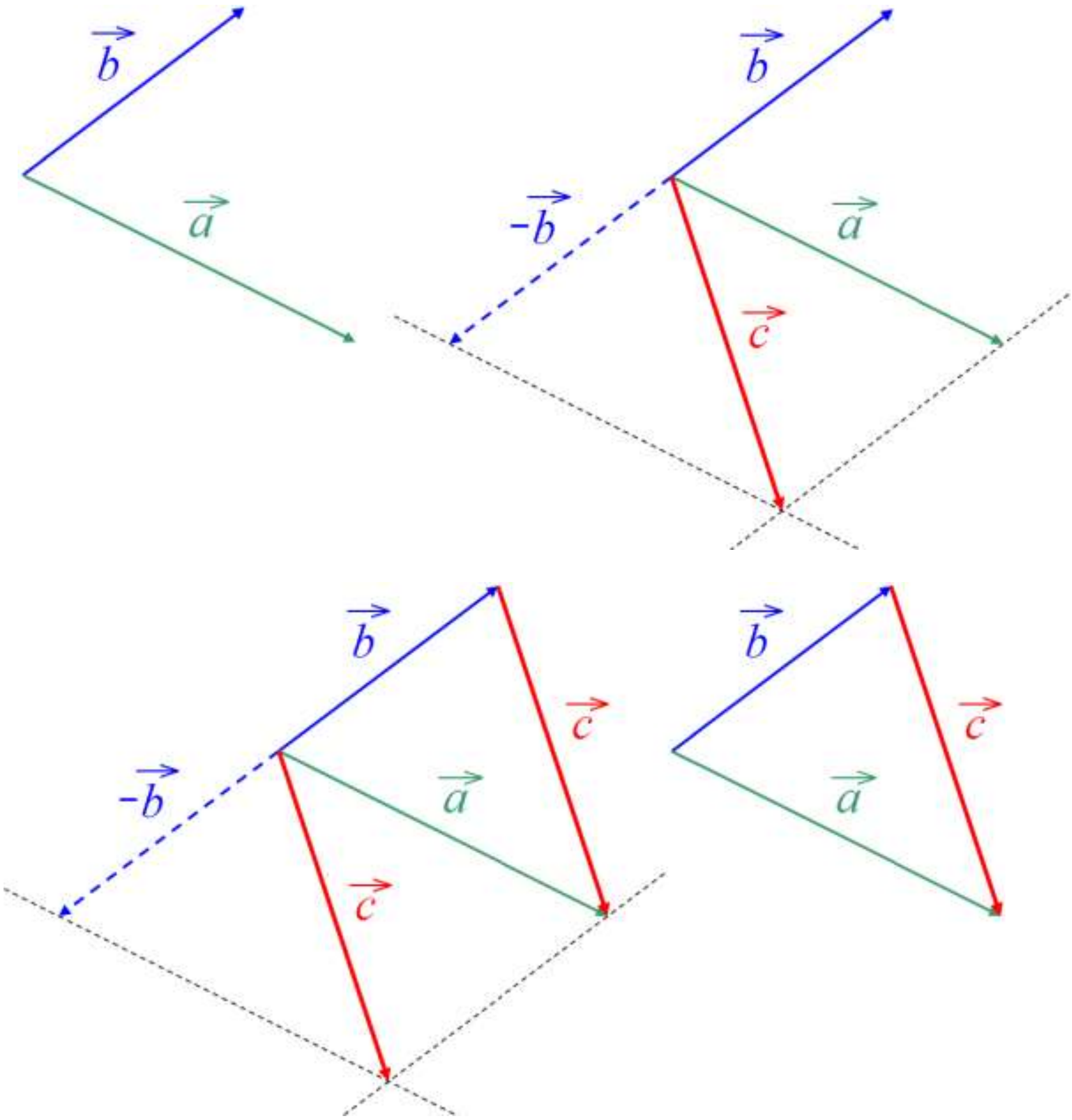
1.) $\vec{a} . 0 = \vec{0}$ Ak vynásobíme vektor číslom nula, dostaneme nulový vektor.

2.) $\vec{0} . k = \vec{0}$ Ak vynásobíme nulový vektor ľubovoľným reálnym číslom, dostaneme nulový vektor.

C) Rozdiel vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ – je vektor $\vec{a} - \vec{b}$, ktorý vznikne ako súčet prvého vektora a opačného vektora k druhému vektoru

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Odčítať vektor $\vec{b}$ od vektora $\vec{a}$ znamená pripočítať k vektoru $\vec{a}$ presne (-1) násobok vektora $\vec{b}$, teda odčítať vektor $\vec{b}$ od vektora $\vec{a}$ znamená pripočítať k vektoru $\vec{a}$ opačný vektor k vektoru $\vec{b}$.



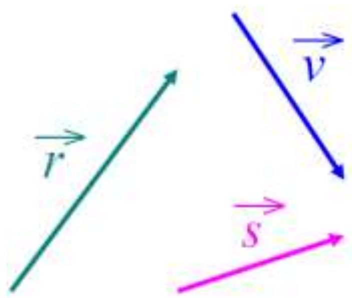
Postup:

Zostrojíme vektor $-\vec{b}$, potom vektorovo sčítame vektory $\vec{a}$, $-\vec{b}$ doplnením do rovnobežníka. Vektor $\vec{c}$ je výsledný vektor. Vhodným posunom vektora $\vec{c}$ zistíme, že vektor $\vec{a} - \vec{b}$ je vektor, ktorý má začiatočný bod v koncovom bode vektora $\vec{b}$ a koncový bod v koncovom bode vektora $\vec{a}$ (smeruje od $\vec{b}$ ku $\vec{a}$), **nie je nutné zostrojovať rovnobežník.**

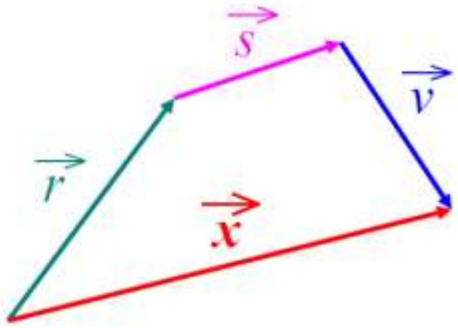
Poznámka:
Sčítať (skladať) môžeme ľubovoľný počet vektorov. Nie je nutné zostrojovať rovnobežníky. Vektorový súčet vektorov nájdeme tak, že začiatočný bod nasledujúceho vektora umiestnime do koncového bodu predchádzajúceho vektora a výsledný vektor dostaneme spojením začiatočného bodu prvého vektora s koncovým bodom posledného vektora v danom vektorovom súčte.

PRÍKLAD 1:

Nájdite vektor $\vec{x}$, ktorý je vektorovým súčtom vektorov $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{v}$.



Riešenie:



$\vec{x} = \vec{r} + \vec{s} + \vec{v}$

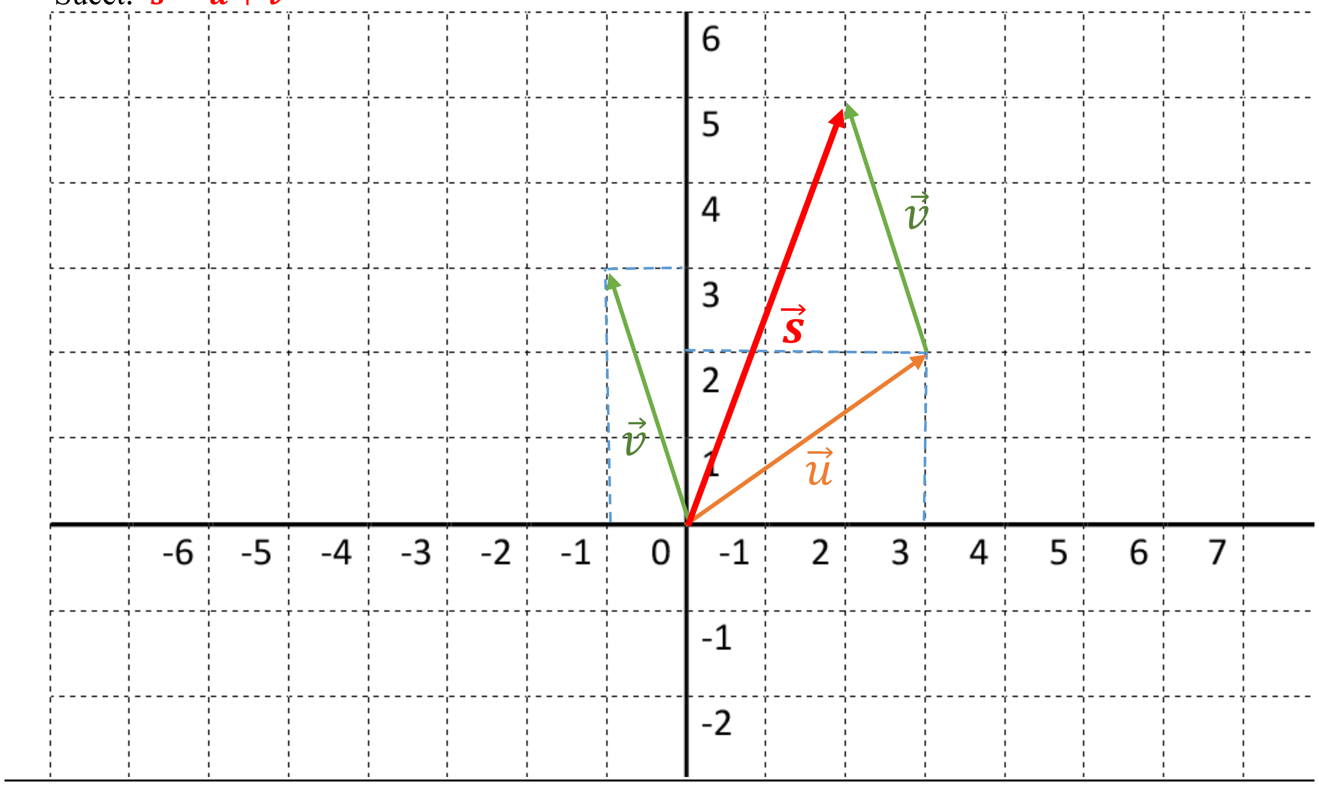
PRÍKLAD 2:

Sú dané vektory $\vec{u} = (3; 2)$ a $\vec{v} = (-1; 3)$. Zakreslite tieto vektory v súradnicovom systéme a určte ich súčet a rozdiel:

a) graficky
b) výpočtom

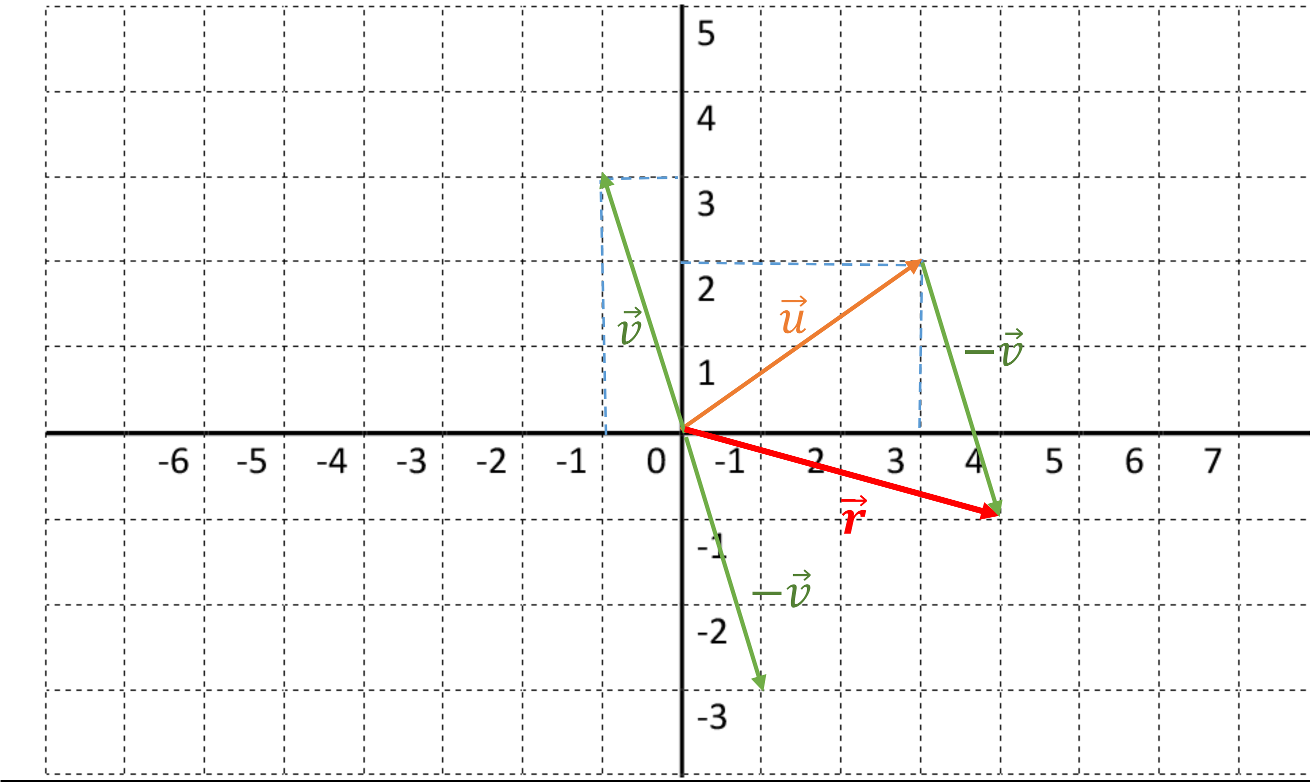
Riešenie a) (graficky):

Súčet: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$



Postup: Najprv zakreslíme umiestnenia vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$, potom presunieme začiatočný bod vektora $\vec{v}$ rovnobežne do koncového bodu vektora $\vec{u}$. Výsledný vektor $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = (2, 5)$

Rozdiel: : $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$



Postup: Najprv zakreslíme umiestnenia vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$, potom narysujeme opačný vektor $-\vec{v}$. Následne presunieme začiatočný bod vektora $-\vec{v}$ rovnobežne do koncového bodu vektora $\vec{u}$. Výsledný vektor $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (4, -1)$

<u>Riešenie b) (výpočtom):</u>

Súčet:

$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1;\ u_2 + v_2\ ] = \ [3 + (-1); 2 + 3] = (2; 5)$

Rozdiel:

$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} = [u_1 - v_1;\ u_2 - v_2\ ] = \ [3 - (-1); 2 - 3] = (4; -1)$

Vidíme, že súradnice oboch vektorov sú v úlohe a) aj v úlohe b) totožné.

<u>Domáca úloha:</u>
Podľa návodu v Príklade 1 a Príklade 2 vyriešte nasledujúcu úlohu:

Sú dané vektory $\vec{u} = (0; 2)$ a $\vec{v} = (2; 2)$. Zakreslite tieto vektory v súradnicovom systéme so začiatkom v počiatku súradnicového systému a určte ich súčet aj rozdiel:

a) graficky
b) výpočtom