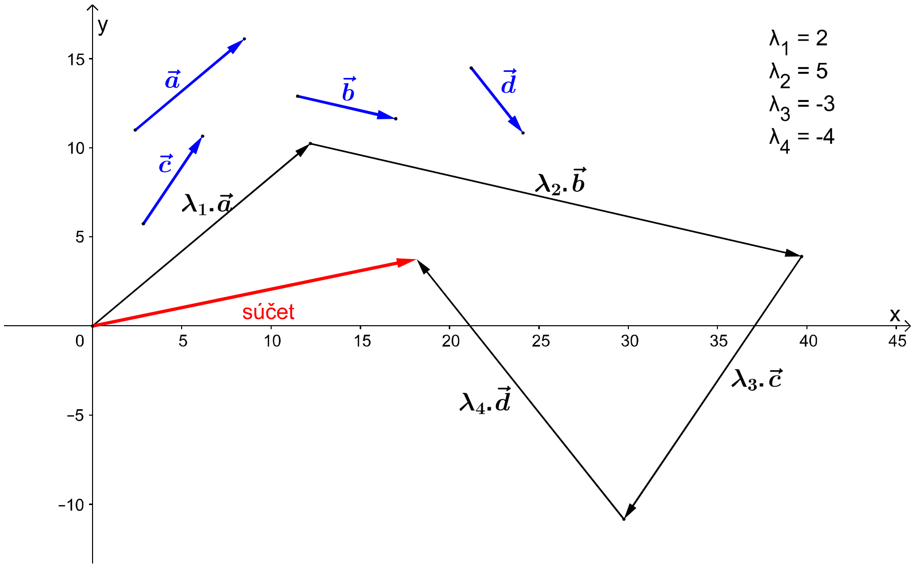
Lineárna kombinácia vektorov

Ak máme daných niekoľko vektorov, násobíme ich číslami a potom ich sčítame, hovoríme, že sme vytvorili jeden vektor *lineárnou kombináciou* tých daných (pri násobení číslom aj pri sčítavaní vznikne vektor ⇒ výsledkom je jeden vektor).



D. Nech sú dané vektory $\vec{a_1}$; $\vec{a_2}$; $\vec{a_3}$; … ; $\vec{a_n}$. ***Vektor*** $\vec{\mathbf{k}}$ ***je lineárnou kombináciou vektorov*** $\vec{\mathbf{a_1}}$; $\vec{\mathbf{a_2}}$; $\vec{\mathbf{a_3}}$; … ; $\vec{\mathbf{a_n}}$, ak k nim môžeme nájsť také reálne čísla λ_1; λ_2; λ_3; … ; λ_n, $\in \mathbb{R}$, že:

$$\vec{k} = \lambda_1.\vec{a_1} + \lambda_2.\vec{a_2} + \lambda_3.\vec{a_3} + \ldots + \lambda_n.\vec{a_n}.$$

príklad:

Zistite veľkosť lineárnych kombinácií vektorov: $\vec{a} = (2; -3)$; $\vec{b} = (-5; 4)$; $\vec{c} = (0; 2)$; $\vec{d} = (1; 0)$.

a, $\vec{e} = 4.\vec{a} + \vec{b} - 3.\vec{d}$ b, $\vec{f} = 5.\vec{a} - 2.\vec{b} + \vec{c}$ c, $\vec{g} = -3.\vec{a} + 4.\vec{b} + 2.\vec{c} - 7.\vec{d}$

$\vec{e} = 4.(2; -3) + (-5; 4) - 3.(1; 0) = (8; -12) + (-5; 4) + (-3; 0) = (0; -8)$

$|\vec{\mathbf{e}}| = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = \sqrt{0 + 64} = \underline{8}$

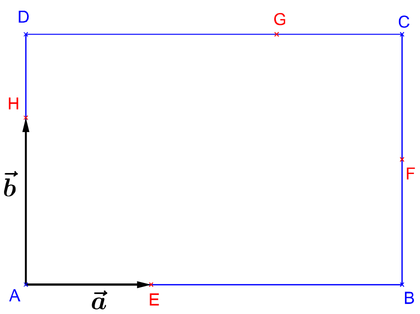
$\vec{f} = 5.(2; -3) - 2.(-5; 4) + (0; 2) = (10; -15) + (10; -8) + (0; 2) = (20; -21)$

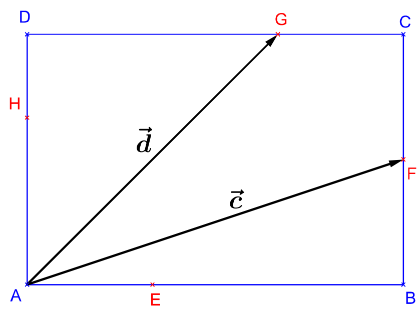
$|\vec{\mathbf{f}}| = \sqrt{20^2 + (-21)^2} = \sqrt{400 + 441} = \underline{29}$

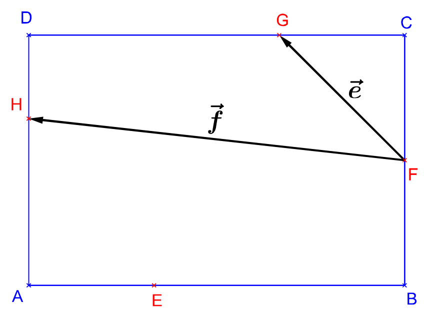
$\vec{g} = -3.(2; -3) + 4.(-5; 4) + 2.(0; 2) - 7.(1; 0) = (-6; 9) + (-20; 16) + (0; 4) + (7; 0) = (-19; 29)$

$|\vec{\mathbf{g}}| = \sqrt{(-19)^2 + 29^2} = \sqrt{361 + 841} = \underline{34{,}70}$

V obdĺžniku ABCD bod E leží v tretine strany AB bližšie k vrcholu A; F je stredom strany BC. Bod G leží v tretine strany CD bližšie k vrcholu C; bod H leží v tretine strany DA bližšie k vrcholu D. Vyjadrite vektory: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FH}$ pomocou vektorov:







a, $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ a $\vec{b} = \overrightarrow{AH}$ b, $\vec{c} = \overrightarrow{AF}$ a $\vec{d} = \overrightarrow{AG}$ c, $\vec{e} = \overrightarrow{FG}$ a $\vec{f} = \overrightarrow{FH}$

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{a}$ — $\vec{a}$ je tretina strany AB ⇒ trojnásobok tretiny

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{b}$ — $\vec{b}$ je dve tretiny strany AD ⇒ 1,5 násobok dvoch tretín

$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\vec{b}$ — polovica $\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{DG} = 2\vec{a}$ — dve tretiny strany AB ⇒ dvojnásobok tretiny

$\overrightarrow{CG} = -\vec{a}$ opačný vektor k $\vec{a}$

$\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ opačný vektor k $\vec{b}$ s polovičnou veľkosťou

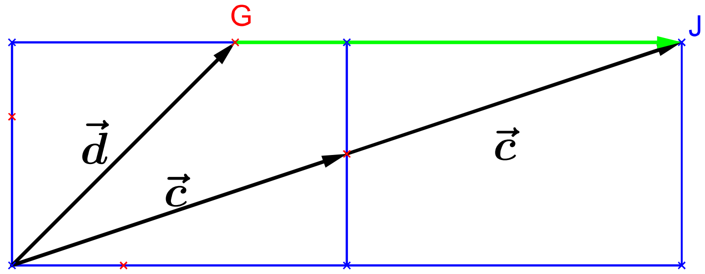
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} - \left(3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} - 3\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} = \vec{b} - \left(3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \vec{b} - 3\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

najprv vyjadríme vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ pomocou $\vec{c}$ a $\vec{d}$, a potom využijeme výsledky zo zadania a,



vektor $\overrightarrow{GJ}$ má smer, ako vektor $\vec{a}$, ale veľkosť má štvornásobnú (tretina strany AB + celá strana AB)

$\overrightarrow{GJ} = 2\vec{c} - \vec{d} \;\rightarrow\; \vec{a} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{4}\left(2\vec{c} - \vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}$

skúsme využiť výsledky z príkladu a, – eliminujme vektor $\vec{b}$

$\vec{c} = \overrightarrow{AF} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

$\vec{d} = \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$

$\vec{c} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ /.4

$\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$ /.(-2)

$4\vec{c} = 12\vec{a} + 3\vec{b}$

$-2\vec{d} = -3\vec{b} - 4\vec{a}$

$4\vec{c} - 2\vec{d} = 8\vec{a}$ /:8

$\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d} = \vec{a}$

algebrickou metódou sme dostali ten istý výsledok, ako graficky

teraz eliminujme vektor $\vec{a}$

$\vec{c} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ /.2

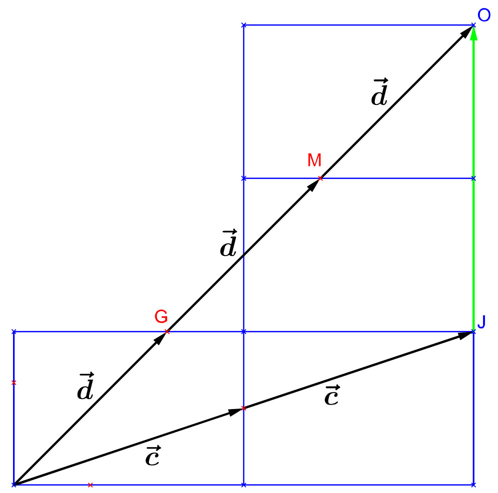
$\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$ /.(-3)

$2\vec{c} = 6\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

$-3\vec{d} = -\frac{9}{2}\vec{b} - 6\vec{a}$

$2\vec{c} - 3\vec{d} = -3\vec{b}$ /:(-3)

$-\frac{2}{3}\vec{c} + \vec{d} = \vec{b}$



vektor $\overrightarrow{OJ}$ má smer, ako vektor $\vec{b}$, ale veľkosť má trojnásobnú (dvakrát strana AD)

$\overrightarrow{OJ} = 3\vec{d} - 2\vec{c} \;\rightarrow\; \vec{b} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}(3\vec{d} - 2\vec{c}) = \vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}$

grafickou metódou sme dostali ten istý výsledok, ako úpravami

teraz dosadíme do výrazov z bodu a,

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} = 3\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) = \frac{3}{2}\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{d}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{3}{2}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{3}{2}\vec{d} - \vec{c}$

$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{3}{4}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{3}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{DG} = 2\vec{a} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{CG} = -\vec{a} = -\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) = \frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{AF} = \vec{c}$

$\overrightarrow{AG} = \vec{d}$

$\overrightarrow{FG} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = -\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) + \frac{3}{4}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{d} + \frac{3}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} = -\vec{c} + \vec{d}$

na obrázku vidíme, že vektor $\overrightarrow{FG}$ je spojnica koncových bodov vektorov $\vec{c}$ a $\vec{d}$ $\Rightarrow$ je to rozdiel tých vektorov – koncový bod je menšenec, začiatočný je menšiteľ: $\vec{d} - \vec{c}$

$\overrightarrow{FH} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = -3\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) + \frac{1}{4}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = -\frac{3}{2}\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d} + \frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{6}\vec{c} = \vec{d} - \frac{5}{3}\vec{c}$

aj teraz vyjadríme vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$, teraz pomocou $\vec{e}$ a $\vec{f}$, a potom využijeme výsledky zo zadania a, znovu využijeme výsledky z príkladu a, – eliminujme vektor $\vec{b}$

$\vec{e} = \overrightarrow{FG} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

$\vec{f} = \overrightarrow{FH} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

$\vec{e} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ /.4

$\vec{f} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ /.(-12)

$4\vec{e} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$

$-12\vec{f} = 36\vec{a} - 3\vec{b}$

$4\vec{e} - 12\vec{f} = 32\vec{a}$ /:32

$\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f} = \vec{a}$

druhýkrát eliminujeme vektor $\vec{a}$

$\vec{e} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ /.(-3)

$\vec{f} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

$-3\vec{e} = 3\vec{a} - \frac{9}{4}\vec{b}$

$\vec{f} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

$-3\vec{e} + \vec{f} = -2\vec{b}$ /:(-2)

$\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f} = \vec{b}$

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} = 3\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{3}{8}\vec{e} - \frac{9}{8}\vec{f}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{9}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f}$

$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{9}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}$

$\overrightarrow{DG} = 2\vec{a} = 2\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{1}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f}$

$\overrightarrow{CG} = -\vec{a} = -\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{3}{8}\vec{f} - \frac{1}{8}\vec{e}$

$\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{1}{4}\vec{f} - \frac{3}{4}\vec{e}$

$\overrightarrow{AF} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = 3\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{3}{8}\vec{e} - \frac{9}{8}\vec{f} + \frac{9}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f} = \frac{3}{2}\vec{e} - \frac{3}{2}\vec{f}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{9}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f} + \frac{1}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f} = \frac{5}{2}\vec{e} - \frac{3}{2}\vec{f}$

$\overrightarrow{FG} = \vec{e}$

$\overrightarrow{FH} = \vec{f}$

Vyjadrite vektor $\vec{k}$ ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov:

a, $\vec{k}(3; -5)$; $\vec{a}(-2; 1)$; $\vec{b}(-3; -2)$ b, $\vec{k}(1; 1)$; $\vec{c}(3; -4)$; $\vec{d}(1; 2)$

c, $\vec{k}(-7; 10)$; $\vec{e}(5; 3)$; $\vec{f}(-2; 3)$ d, $\vec{k}(-2; -6)$; $\vec{g}(6; 2)$; $\vec{h}(-1; 1)$

$\vec{k} = \lambda_1.\vec{a} + \lambda_2.\vec{b} = \lambda_1.(-2; 1) + \lambda_2.(-3; -2) = (-2\lambda_1; \lambda_1) + (-3\lambda_2; -2\lambda_2) = (-2\lambda_1 - 3\lambda_2; \lambda_1 - 2\lambda_2)$

$(3; -5) = (-2\lambda_1 - 3\lambda_2; \lambda_1 - 2\lambda_2) \Leftrightarrow (3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \wedge -5 = \lambda_1 - 2\lambda_2)$

$3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2$

$-5 = \lambda_1 - 2\lambda_2$ /.2

$3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2$

$-10 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2$

$-7 = -7\lambda_2$ /:(-7)

$1 = \lambda_2$

$-5 = \lambda_1 - 2.1$ /+ 2

$-3 = \lambda_1$

$\underline{\vec{k} = -3\vec{a} + 1\vec{b}}$

$\vec{k} = \lambda_1.\vec{c} + \lambda_2.\vec{d} = \lambda_1.(3; -4) + \lambda_2.(1; 2) = (3\lambda_1; -4\lambda_1) + (\lambda_2; 2\lambda_2) = (3\lambda_1 + \lambda_2; -4\lambda_1 + 2\lambda_2)$

$(1; 1) = (3\lambda_1 + \lambda_2; -4\lambda_1 + 2\lambda_2) \Leftrightarrow (1 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \wedge 1 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2)$

$1 = 3\lambda_1 + \lambda_2$ /.(-2)

$1 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2$

$-2 = -6\lambda_1 - 2\lambda_2$

$1 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2$

$-1 = -10\lambda_1$ /:(-10)

$\frac{1}{10} = \lambda_1$

$1 = 3.\frac{1}{10} + \lambda_2$ $/-\frac{3}{10}$

$\frac{7}{10} = \lambda_2$

$\underline{\underline{\vec{k} = \frac{1}{10}\vec{c} + \frac{7}{10}\vec{d}}}$

$\vec{k} = \lambda_1.\vec{e} + \lambda_2.\vec{f} = \lambda_1.(5; 3) + \lambda_2.(-2; 3) = (5\lambda_1; 3\lambda_1) + (-2\lambda_2; 3\lambda_2) = (5\lambda_1 - 2\lambda_2; 3\lambda_1 + 3\lambda_2)$

$(-7; 10) = (5\lambda_1 - 2\lambda_2; 3\lambda_1 + 3\lambda_2) \Leftrightarrow (-7 = 5\lambda_1 - 2\lambda_2 \wedge 10 = 3\lambda_1 + 3\lambda_2)$

$-7 = 5\lambda_1 - 2\lambda_2$ /.3

$10 = 3\lambda_1 + 3\lambda_2$ /.2

$-21 = 15\lambda_1 - 6\lambda_2$

$20 = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$

$-1 = 21\lambda_1 \qquad /:21$

$-\frac{1}{21} = \lambda_1$

$-7 = 5.\left(-\frac{1}{21}\right) - 2\lambda_2$

$-\frac{142}{21} = -2\lambda_2 \qquad /:(-2)$

$\frac{71}{21} = \lambda_2$

$\underline{\underline{\vec{k} = \frac{1}{21}\vec{e} + \frac{71}{21}\vec{f}}}$

$\vec{k} = \lambda_1.\vec{g} + \lambda_2.\vec{h} = \lambda_1.(6; 2) + \lambda_2.(-1; 1) = (6\lambda_1; 2\lambda_1) + (-1\lambda_2; \lambda_2) = (6\lambda_1 - \lambda_2; 2\lambda_1 + \lambda_2)$

$(-2; -6) = (6\lambda_1 - \lambda_2; 2\lambda_1 + \lambda_2) \Leftrightarrow (-2 = 6\lambda_1 - \lambda_2 \land -6 = 2\lambda_1 + \lambda_2)$

$-2 = 6\lambda_1 - \lambda_2$

$-6 = 2\lambda_1 + \lambda_2$

$-8 = 8\lambda_1 \qquad /:8$

$-1 = \lambda_1$

$-6 = 2.(-1) + \lambda_2$

$-4 = \lambda_2$

$\underline{\underline{\vec{k} = -\vec{g} - 4\vec{h}}}$

Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov

D1. Vektory sú ***lineárne závislé***, ak aspoň jeden z nich môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných.

$\exists\, \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; \ldots; \lambda_n \in \mathbb{R}: \overrightarrow{a_1} = \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + \lambda_3.\overrightarrow{a_3} + \lambda_4.\overrightarrow{a_4} + \ldots + \lambda_n.\overrightarrow{a_n}$

D2. Vektory sú ***lineárne závislé***, ak nulový vektor môžem dostať takou lineárnou kombináciou tých vektorov, kde aspoň jeden koeficient je rôzny od nuly.

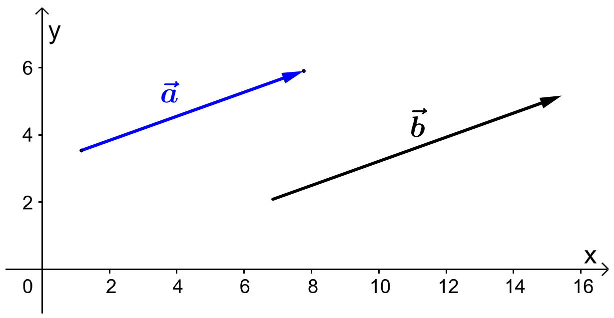
$\vec{0} = \lambda_1.\overrightarrow{a_1} + \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + \lambda_3.\overrightarrow{a_3} + \ldots + \lambda_n.\overrightarrow{a_n} \Rightarrow \exists\, \lambda_i \neq 0 \land i \in [1; n]$

D1. Vektory sú ***lineárne nezávislé***, ak ani jeden z nich nemôžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných.

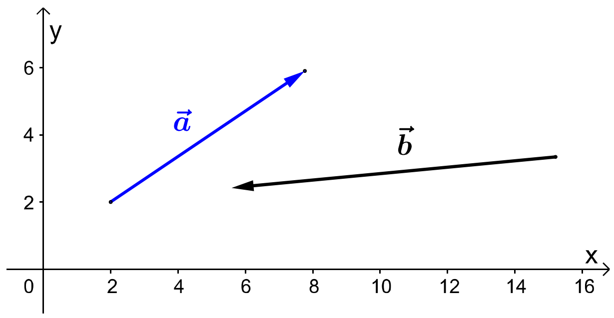
D2. Vektory sú ***lineárne nezávislé***, ak nulový vektor jedine takou lineárnou kombináciou môžeme dostať, kde všetky koeficienty sú nuly.

$\vec{0} = \lambda_1.\overrightarrow{a_1} + \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + \lambda_3.\overrightarrow{a_3} + \ldots + \lambda_n.\overrightarrow{a_n} \Rightarrow \forall\, \lambda_i = 0 \land i \in [1; n]$

V. Dva vektory práve vtedy sú lineárne závislé, ak sú rovnobežné (potom podiel veľkostí vektorov – alebo opačná hodnota – je číslo, ktorým ak násobím jeden, dostanem druhý). Ak dva vektory sú rôznobežné (zvierajú iný uhol, ako 0° alebo 180°), potom sú lineárne nezávislé.



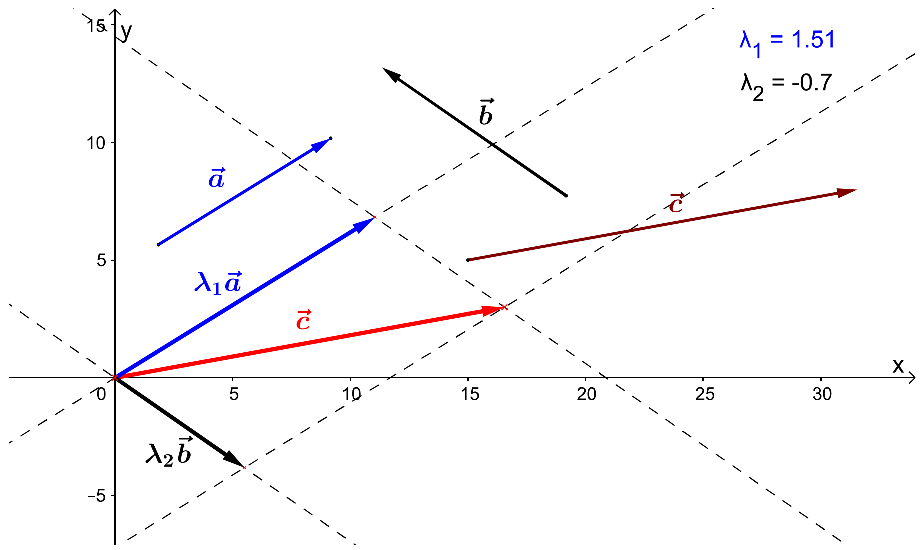
lineárne závislé



lineárne nezávislé

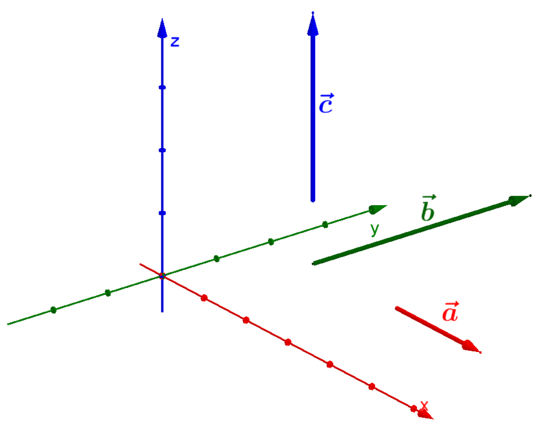
V. Tri vektory v rovine sú vždy lineárne závislé.

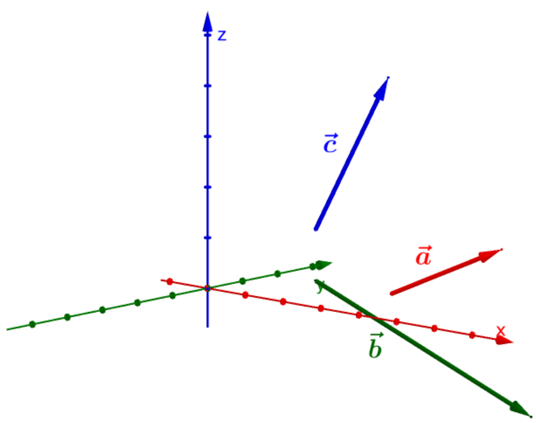
- buď sú medzi nimi aspoň dva vektory rovnobežné
- alebo doplnením na rovnobežník graficky môžeme určiť lineárnu kombináciu – presne určiť lineárnu kombináciu môžeme riešením sústavy rovníc



umiestnime všetky tri do jedného bodu (napríklad do začiatku súradnicovej sústavy
doplníme na rovnobežník – v koncovom bode tretieho vektora (ktorý sa snažíme vyjadriť ako lineárnu kombináciu prvých dvoch) vedieme rovnobežné priamky s prvými dvomi vektormi
a pomer dĺžky strany rovnobežníka a veľkosť rovnobežného vektora je koeficient lineárnej kombinácie – znamienko musíme doplniť podľa smeru (viď. $\lambda_2.\vec{b}$ má opačný smer ako samotný vektor $\vec{b}$)

P. V priestore môžeme mať maximálne tri vektory, ktoré tvoria lineárne nezávislú sústavu. Štyri vektory vždy budú lineárne závislé.
Najjednoduchší príklad, ak zoberieme tri navzájom kolmé vektory: jeden v smere *x*-ovej, druhý *y*-ovej a tretí *z*-ovej osi.
Ani nemusia byť navzájom kolmé. Stačí, ak tretí vektor zviera nenulový uhol s rovinou určenou prvými dvomi vektormi.





lineárne nezávislé

príklad:

Zistite, či uvedené vektory sú lineárne závislé:

a, $\vec{a}$ (2; 7); $\vec{b}$ (-4; -12) b, $\vec{c}$ (20; -15); $\vec{d}$ (-8; 6)

ak sú lineárne závislé, potom jeden je násobkom druhého

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$: $\vec{a} = \lambda.\vec{b}$

$(2; 7) = \lambda.(-4; -12)$

$(2; 7) = (-4.\lambda; -12.\lambda) \Leftrightarrow$

$2 = -4\lambda \ \wedge\ 7 = -12\lambda$

$-\frac{2}{4} = \lambda \ \wedge\ -\frac{7}{12} = \lambda$

dostali sme dve rôzne hodnoty $\Rightarrow$ sú lineárne nezávislé

$\vec{c} = \lambda.\vec{d}$

$(20; -15) = \lambda.(-8; 6)$

$(20; -15) = (-8.\lambda; 6.\lambda) \Leftrightarrow$

$20 = -8\lambda \;\wedge\; -15 = 6\lambda$

$-\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} = \lambda \;\wedge\; -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} = \lambda$

dostali sme rovnaké hodnoty $\Rightarrow$ sú lineárne závislé

Zistite, či uvedené vektory sú lineárne závislé:

a, $\vec{a}$ (7; -5); $\vec{e}$ (2; 1); $\vec{f}$ (1; 2) b, $\vec{a}$ (-3; -2); $\vec{g}$ (1; -1); $\vec{h}$ (-1; -2)

$\vec{a} = \lambda_1.\vec{e} + \lambda_2.\vec{f} = \lambda_1.(2; 1) + \lambda_2.(1; 2) = (2\lambda_1; 1\lambda_1) + (1\lambda_2; 2\lambda_2) = (2\lambda_1 + \lambda_2; \lambda_1 + 2\lambda_2)$

$(7; -5) = (2\lambda_1 + \lambda_2; \lambda_1 + 2\lambda_2) \;\Leftrightarrow$

$7 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \;\wedge\; -5 = \lambda_1 + 2\lambda_2$

$7 = 2\lambda_1 + \lambda_2$

$-5 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \qquad /.(-2)$

$7 = 2\lambda_1 + \lambda_2$

$10 = -2\lambda_1 - 4\lambda_2$

$17 = -3\lambda_2 \qquad /:(-3)$

$-\frac{17}{3} = \lambda_2$

$-5 = \lambda_1 + 2.\left(-\frac{17}{3}\right) \qquad /+\frac{34}{3}$

$\frac{19}{3} = \lambda_1$

$\vec{a} = \frac{19}{3}.\vec{e} - \frac{17}{3}.\vec{f} \;\Rightarrow$ sú lineárne závislé

$\vec{a} = \lambda_1.\vec{g} + \lambda_2.\vec{h} = \lambda_1.(1; -1) + \lambda_2.(-1; -2) = (1\lambda_1; -1\lambda_1) + (-1\lambda_2; -2\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2; -\lambda_1 - 2\lambda_2)$

$(-3; -2) = (\lambda_1 - \lambda_2; -\lambda_1 - 2\lambda_2) \;\Leftrightarrow$

$-3 = \lambda_1 - \lambda_2$

$-2 = -\lambda_1 - 2\lambda_2$

$-5 = -3\lambda_2 \qquad /:(-3)$

$\frac{5}{3} = \lambda_2$

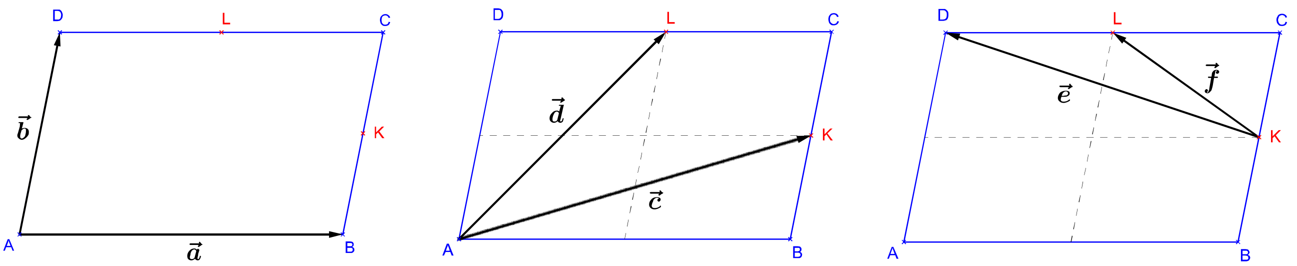
$-3 = \lambda_1 - \frac{5}{3} \qquad /+\frac{5}{3}$

$-\frac{4}{3} = \lambda_1$

$\vec{a} = -\frac{4}{3}.\vec{g} + \frac{5}{3}.\vec{h} \;\Rightarrow$ sú lineárne závislé

Zistite, či tri body ležia v jednej priamke: A(3; 7), B(10; -2), C(5; 1).

V rovnobežníku ABCD je bod K stredom strany BC a L stredom strany CD. Vyjadrite vektory: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{DL}$, $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{KL}$ pomocou vektorov:



a, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ a $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ b, $\vec{e} = \overrightarrow{AK}$ a $\vec{f} = \overrightarrow{AL}$ c, $\vec{x} = \overrightarrow{KL}$ a $\vec{y} = \overrightarrow{KD}$

Zistite, či uvedené vektory sú lineárne závislé:

a, $\vec{a}$ (-1; 1), $\vec{b}$ (1; 1) b, $\vec{c}$ (6; -2), $\vec{d}$ (-3; 1)

Vyjadrite vektor $\vec{e}$ a vektor $\vec{h}$ ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov:

a, $\vec{e}$ (2; 4), $\vec{f}$ (1; 3), $\vec{g}$ (0; -4) b, $\vec{h}$ (7; 5), $\vec{i}$ (1; 1), $\vec{j}$ (0; 1)

Napíšte vektor D – A ako lineárnu kombináciu vektorov B – A a C – A, ak: A(3; 5), B(2; 10), C(5; -2), D(5; 4).

Zistite veľkosť vektora $\vec{x} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, ak: $\vec{m} = (9; 12)$, $\vec{n} = (1; -4)$.

Určte chýbajúce súradnice tak, aby vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ boli lineárne závislé:

a, $\vec{a} = (-2; a_2)$, $\vec{b} = \left(b_1; -\frac{9}{2}\right)$, keď $a_2 = b_1$

b, $\vec{a} = (a_1; 9)$, $\vec{b} = (4; b_2)$, keď $a_1 = b_2$