

Kombinatorika

Faktoriál $n!$

V matematike sa pojmom **faktoriál** prirodzeného čísla n označuje súčin všetkých prirodzených čísel od n po 1. Zapisuje sa $n!$ a číta sa „ n faktoriál“. Napríklad:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \dots$$

Faktoriál čísla n sa rovná počtu rôznych **permutácií** n -prvkovej množiny.

Funkcia faktoriál rastie rýchlejšie, než akákoľvek exponenciálna funkcia a tým skôr rýchlejšie než akýkoľvek mnohočlen.

Využitie:

- výpočet pravdepodobnosti
- výpočet kombinácií

Úpravy faktoriálu:

$$\frac{11!}{8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$$

$$3! + 2! = 3 \cdot 2! + 2! = 2! (3 + 1) = 2 \cdot 1(4) = 8$$

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)!}{(n-2)!} - \frac{4(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{9n!}{(n-1)!} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} - \frac{4(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} + \frac{9 \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} \\ &= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) - 4(n+1) \cdot n + 9 \cdot n \\ &= n((n+1) \cdot (n-1) - 4(n+1) + 9) \\ &= n(n^2 - 1 - 4n - 4 + 9) \\ &= n(n^2 - 4n + 4) \end{aligned}$$

Variácie

Záleží na poradí prvkov v k -tici. $[2,3] \neq [3,2]$

Bez opakovania prvkov $V(k,n)$ $V_k(n)$

k -členná variácia z n prvkov je usporiadaná k -tica zostavená z daných prvkov tak, že každý sa v nej vyskytuje najviac raz.

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V(k, n) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$$

S opakovaním prvkov $V'(k,n)$

Variácie s opakovaním k -tej triedy z n prvkov sú všetky usporiadané k -tice, v ktorých sa môžu prvky opakovať.

$$V' = n^k$$

Permutácie

Z n prvkov vyberáme usporiadané n -tice.

Špeciálny typ variácií.

Záleží na poradí.

Bez opakovania prvkov $P(n)$

$$P(n) = n!$$

S opakovaním prvkov $P'(n)$

$$P' = n^n$$

Kombinácie

Z n prvkovej množiny vyberáme k -prvkové podmnožiny.

Nezáleží na poradí.

Bez opakovania prvkov $C(k,n)$

$$C(k, n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} = \text{kombinačné číslo}$$

S opakovaním prvkov $C'(n,k)$

k -kombinácie s opakovaním definujeme ako k -tice prvkov z n druhov $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, v ktorých nezáleží na poradí ale prvky (druhy) sa môžu opakovať.