Zväzovo usporiadané množiny

Nech $\preceq$ je relácia usporiadania na množine X. Hovoríme, že $(X, \preceq)$ je **zväzovo usporiadaná množina**, ak pre každú svoju dvojprvkovú podmnožinu obsahuje množina X aj jej supremum a infimum.

Zväzy

Nech X je množina, $\wedge, \vee$ sú operácie na X, pre ktoré platí:

- $\forall x \in X\colon\; x \vee x = x,\; x \wedge x = x,$
  (idempotencia)
- $\forall x, y \in X\colon\; x \vee y = y \vee x,\; x \wedge y = y \wedge x,$
  (komutativita)
- $\forall x, y, z \in X\colon\; (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),\; (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z),$
  (asociativita)
- $\forall x, y \in X\colon\; x \wedge (x \vee y) = x,\; x \vee (x \wedge y) = x.$
  (absorbčné zákony)

Potom trojicu $(X, \vee, \wedge)$ nazývame **zväzom** na X. Operáciu $\vee$ nazývame **spojenie** a operáciu $\wedge$ nazývame **priesek**.

Podzväzy

Hovoríme, že zväz $(Y, \vee, \wedge)$ je **podzväz** zväzu $(X, \vee, \wedge)$, ak platí:

- $Y \subseteq X$,
- $\forall x, y \in Y\colon\ x \vee y \in Y,\ x \wedge y \in Y.$

Izomorfizmus

Nech $(X, \vee_X, \wedge_X)$, $(Y, \vee_Y, \wedge_Y)$ sú zväzy. Ak existuje bijekcia $f : X \to Y$ taká, že $\forall x, y \in X$ platí:

$$f(x \vee_X y) = f(x) \vee_Y f(y) \quad \wedge \quad f(x \wedge_X y) = f(x) \wedge_Y f(y),$$

potom hovoríme, že $(X, \vee_X, \wedge_X)$, $(Y, \vee_Y, \wedge_Y)$ sú **izomorfné zväzy**.

Klasifikácia zväzov

Nech $(X, \vee, \wedge)$ je zväz. Hovoríme, že $(X, \vee, \wedge)$ je

- **modulárny**, ak $\forall x, y, z \in X$ platí

$$x \preceq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z,$$

- **distributívny**, ak $\forall x, y, z \in X$ platí

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

- **komplementárny**, ak v X existuje najmenší prvok 0 a najväčší prvok 1 a ku každému $x \in X$ existuje $\overline{x} \in X$ taký, že:

$$x \wedge \overline{x} = 0, x \vee \overline{x} = 1.$$

Prvok $\overline{x}$ nazývame **komplementom** (doplnkom) prvku x.

Klasifikácia zväzov

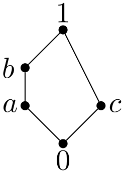
1. Každý distributívny zväz je modulárny.
2. Nech $(X, \vee, \wedge)$ je distributívny zväz. Potom každý prvok v X má najviac jeden komplement.

Klasifikácia zväzov

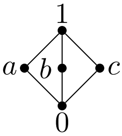
Zväz $(X, \vee, \wedge)$ je

- modulárny $\iff$ neobsahuje podzväz izomorfný s N_5.
- distributívny $\iff$ neobsahuje podzväz izomorfný s M_5 ani N_5.

N_5 :



M_5 :



Booleove algebry

Nech $(X, \oplus, \otimes, ', 0, 1)$ je algebra s dvoma binárnymi operáciami $\oplus, \otimes$ unárnou operáciou $'$ a dvoma nulárnymi operáciami $0, 1$. Potom $(X, \oplus, \otimes, ', 0, 1)$ je Booleova algebra, práve vtedy, keď sú pre všetky $x, y, z \in X$ splnené tieto podmienky:

- $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), \quad (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z),$
  (asociativita)
- $x \oplus y = y \oplus x, \quad x \otimes y = y \otimes x,$
  (komutativita)
- $x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z),$
  $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z),$
  (distributivita)
- $x \oplus 0 = x, \quad x \otimes 1 = x,$
- $x \oplus x' = 1, \quad x \otimes x' = 0.$

Booleove zväzy

Nech $(X, \vee, \wedge)$ je distributívny a komplementárny zväz s najmenším prvkom $0 \in X$ a najväčším prvkom $1 \in X$. Potom $(X, \vee, \wedge)$ nazývame **Booleovým zväzom.**

Konečné Booleove zväzy

- Nech $(X, \vee, \wedge)$ je Booleov zväz s najmenším prvkom $0 \in X$. Hovoríme, že $a \in X$ je **atóm** zväzu X, ak pokrýva najmenší prvok 0.
- Nech $(X, \vee, \wedge)$ je konečný Booleov zväz. Potom $(X, \vee, \wedge)$ je izomorfný so zväzom $(\mathcal{P}(Y), \cup, \cap)$, kde Y je množina všetkých atómov zväzu $(X, \vee, \wedge)$.