

Střídavý proud

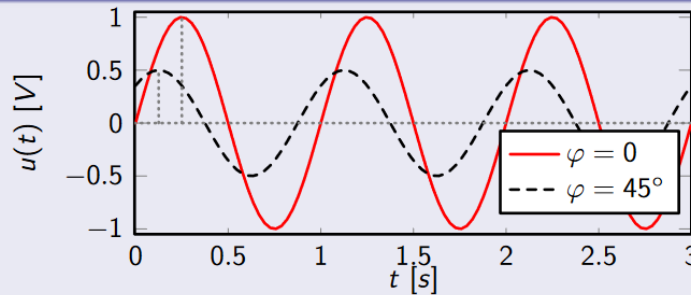
- Analýza lineárních obvodů se střídavým proudem (AC)

- Střídavé napětí (ustálený stav):

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

- A je amplituda [V], ω je úhlová frekvence [rad/s] ($\omega = 2\pi f$)
- Φ je fázový posuv v [rad] nebo stupních [°] ($2\pi \text{ rad} = 360^\circ$)

Příklad pro $f = 1\text{Hz}$, různá amplituda a fáze

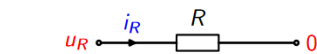


-

- Základní pojmy

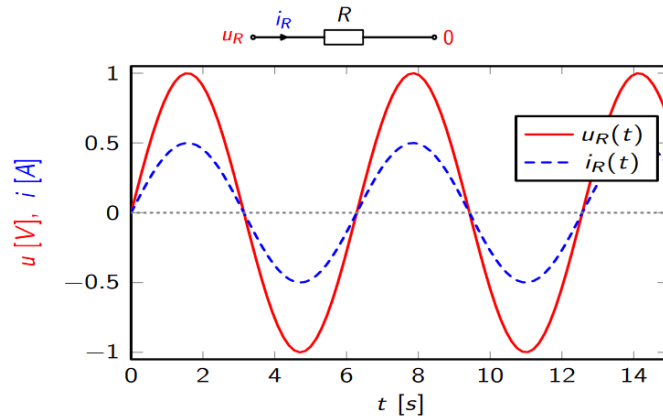
- Ustálený stav (anglicky: steady state)
- Periodický signál s periodou T [s]:
 - $u(t + T) = u(t)$
- Amplituda A [V] je maximální napětí (peak voltage)
- Frekvence $f = \frac{1}{T}$ [Hz, s^{-1}]
- Úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$ [rad/s]
- Fázový posuv ϕ [rad] nebo [°] ($2\pi \text{ rad} = 360^\circ$)
- Efektivní hodnota napětí (RMS) $U_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}}$
- Příklad: $U_{ef} = 230\text{V} \Rightarrow A = U_{ef} * \sqrt{2} = 325\text{V}$ (Tohle je v zásuvce, běžný měřicí přístroj určí efektivní hodnotu, TRUE RMS měřicí přístroje dokážou zjistit hodnoty i nesinusových napětí)
- Poznámky: oscilátory, signály, modulace (CW – continuous wave (vysílám/nevysílám), AM – amplitude modulation (změna amplitudy), FM – frequency modulation (změna frekvence), QAM – např. televizní signál (dovoluje zakódovat až 256 možností v jedné jednotce), ...)

- Rezistor — rovnice a příklad řešení



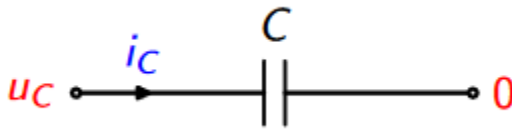
-
- **Ohmův zákon**
 - $u_R(t) = R * i_R(t)$
- **Řešení po připojení zdroje napětí $u_R(t) = U_R \sin(\omega t)$:**
 - $i_R(t) = \frac{1}{R} u_R(t) = \frac{U_R}{R} \sin(\omega t) = I_R \sin(\omega t)$
 - **I_R – amplituda proudu**
- Pro amplitudu platí: $I_R = \frac{U_R}{R}$
- Napětí a proud na odporu jsou ve fázi.

Rezistor — napětí a proud pro $U_R = 1V$, $R = 2\Omega$, $\omega = 1$



○

- Kondenzátor — rovnice a příklad řešení



○

○ Rovnice:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad u_C(0) = 0$$

○ Řešení po připojení na zdroj napětí $u_C(t) = U_C \sin(\omega t)$:

$$i_C(t) = C U_C \omega \cos(\omega t) = C U_C \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_C \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

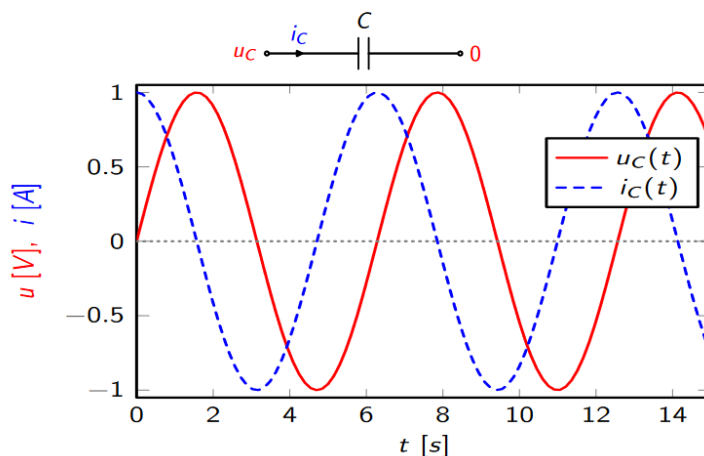
Matematika: $\frac{d \sin(kx)}{dx} = k \cos(kx)$

○ Pro amplitudu platí: $I_C = U_C \omega C$

○ Napětí a proud nejsou ve fázi, proud "předbíhá" napětí

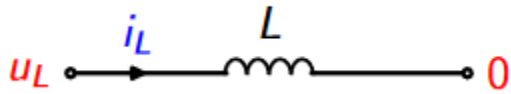
○ Fázový posun je $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

Kondenzátor — napětí a proud pro $U_C = 1V$, $\omega = 1$ a $C = 1F$



○

- Cívka — rovnice a příklad řešení



-
- Rovnice:

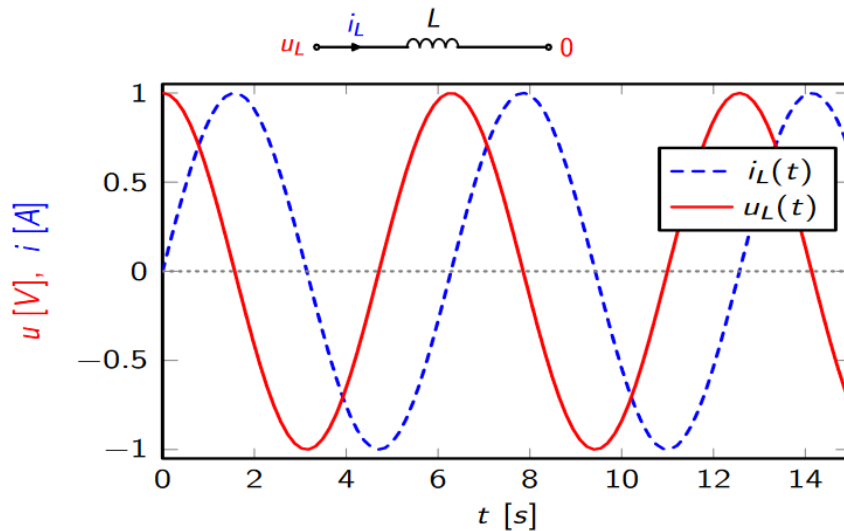
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_L(0) = 0$$

- Řešení po připojení na zdroj proudu $i_L(t) = I_L \sin(\omega t)$:

$$u_L(t) = L I_L \omega \cos(\omega t) = L I_L \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Pro amplitudu platí: $U_L = I_L \omega L$
- Napětí a proud nejsou ve fázi, napětí "předbíhá" proud
- Fázový posun je $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

Cívka — napětí a proud pro $I_L = 1A$, $\omega = 1$ a $L = 1H$



-
- Výkon je Proud krát Napětí
- Výkon se za jednu periodu střídá (+, -, +, -)
- Takže celkový výkon bude 0 (Cívka ani Kondenzátor nehřeje)

- Poznámky

- **Shrnutí**
 - **Rezistor:** proud i napětí ve fázi
 - **Kondenzátor:** proud předbíhá napětí o 90°
 - **Cívka:** napětí předbíhá proud o 90°
- Příklady: viz simulace
- Test znalostí: nakreslete předchozí obrázky pro $\omega = 2$
- Test znalostí: nakreslete obrázky pro amplitudu 2
- Poznámka: Cívkou i kondenzátorem teče proud i při nulovém napětí.

- **Reaktance**

- Reaktanci vypočteme jako poměr amplitud napětí a proudu

Odpor:

$$R = \frac{U_R}{I_R}$$

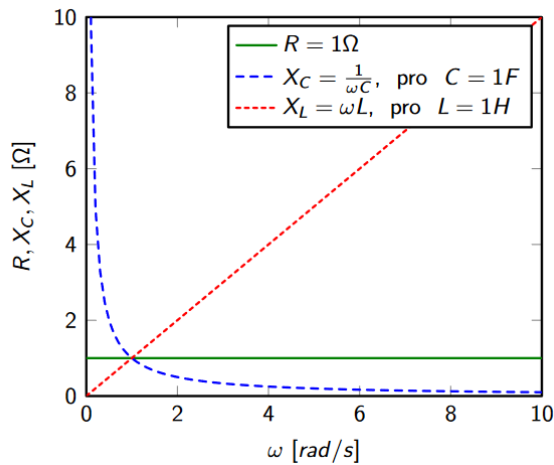
Kapacitní reaktance:

$$X_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{\omega C}$$

Induktivní reaktance:

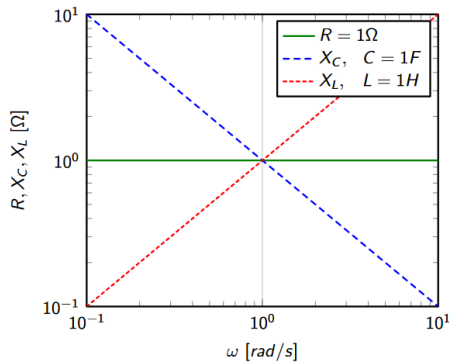
$$X_L = \frac{U_L}{I_L} = \omega L$$

-



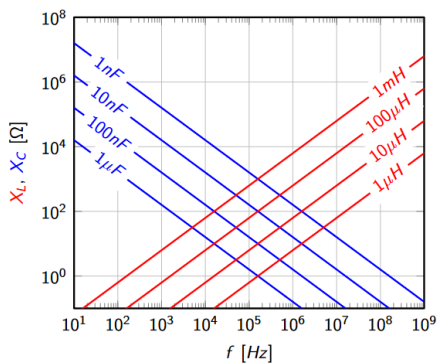
-

Reaktance — logaritmické souřadnice



-

Reaktance ideálních kondenzátorů a cívek — příklady



-

- Jednotka decibel

- Poměrová jednotka decibel — definice:

- Poměr výkonu: $G_p = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) [dB]$
 ([dBm] pro referenční výkon $P_1 = 1mW$)

- Poměr napětí: $G_u = 20 \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) [dB]$

(např. pro referenční napětí $U_1 = 0.775V$; odpovídá $1mW$ na 600Ω)

- - 10 se násobí kvůli jednotkám dB (deci)
 - 20 je tam proto, protože výkon je: $\frac{U^2}{R}$, R se navzájem vykrátí, $\frac{U_2^2}{U_1^2}$ na druhou se v logaritmu vytáhne dopředu

- Příklad1: Napěťové zesílení zesilovače (zisk)

$$G = \frac{U_2}{U_1} = 10000 \Rightarrow G_u = 80dB$$

- Příklad2: útlum kabelu $G = \frac{U_2}{U_1} = 0.01 \Rightarrow G_u = -40dB$

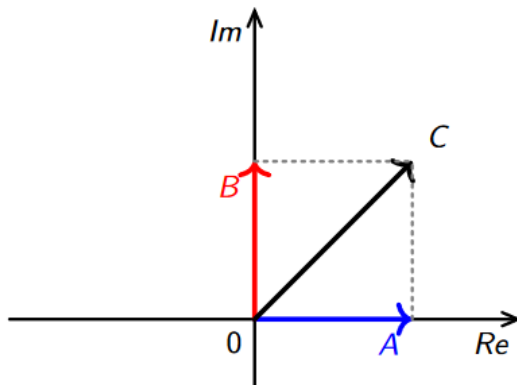
- Příklad3: Odstup signál/šum (SNR=Signal to Noise Ratio)

$$G = \frac{U_{sig}}{U_{noise}} = 1000 \Rightarrow SNR = 60dB$$

- Příklad4: $G = 2 \Rightarrow G_u \approx 6dB$

- Fázory

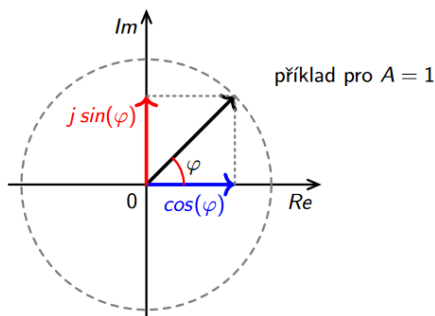
- Fázor: vyjádření amplitudy i fáze vektorem / komplexním číslem:



- $|A|^2 + |B|^2 = |C|^2$
- Poznámky: polární souřadnice, komplexní čísla, operace + - * /
- Fázor napětí

- Komplexní vyjádření amplitudy A i fáze ϕ střídavého napětí
 - (Pozor: j je jiné označení pro imaginární jednotku i)

$$u(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))$$



- Impedance

Impedance je *komplexní číslo* vyjadřující amplitudu i fázový posuv

Impedance ideálního rezistoru

$$Z_R = R$$

Impedance ideálního kondenzátoru

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Impedance ideální cívky

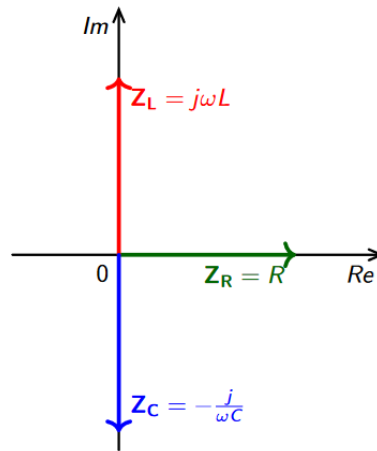
$$Z_L = j\omega L$$

Poznámky:

- Ohmův zákon platí i pro impedanci: $\mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{I}$
- Reaktance kondenzátoru(cívky) je absolutní hodnota $Z_C(Z_L)$.

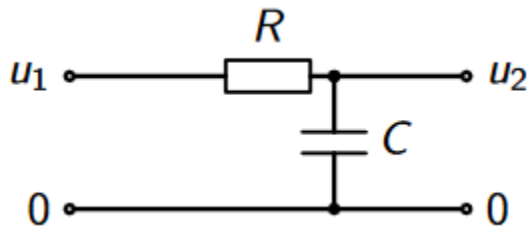
○

Impedance R, L, C — fázory



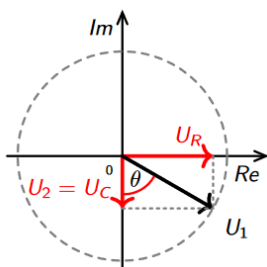
○

- Integrační RC článek



○

○ Impedance RC článku: $Z_{RC} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$



○

○ **Odvození přenosu**

- ① Uvažujeme pouze amplitudy napětí U a proudu I
- ② Známe: $U_R = RI$, $U_C = X_C I = \frac{I}{\omega C}$
- ③ Z trojúhelníku napětí (viz obrázek) a Pythagorovy věty

$$U_1^2 = (RI)^2 + \left(\frac{I}{\omega C}\right)^2$$

vypočteme velikost proudu

$$I = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

a výstupní napětí

$$U_2 = U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U_1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

- ④ Přenos signálu: $G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$

Integrační RC článek — pokračování

Přenos signálu:

$$G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

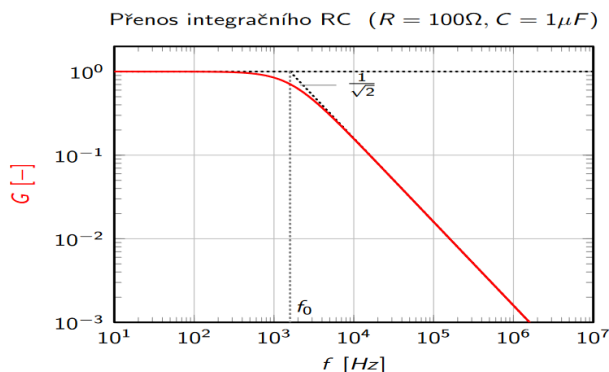
Fáze:

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{U_R}{U_C}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{RI}{X_C I}\right) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

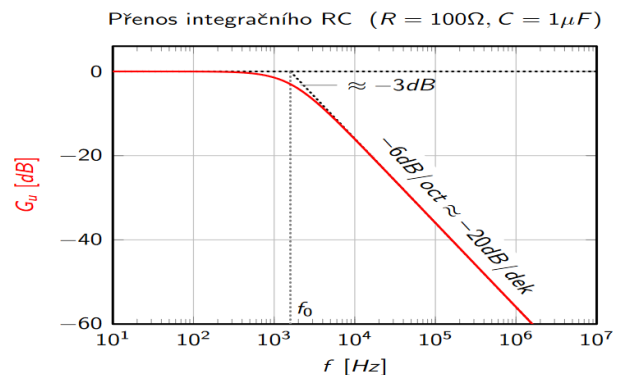
Mezní frekvence (pro $U_R = U_C$ platí $G_u = -3dB$, $\theta = -45^\circ$):

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Integrační RC článek — frekvenční charakteristika

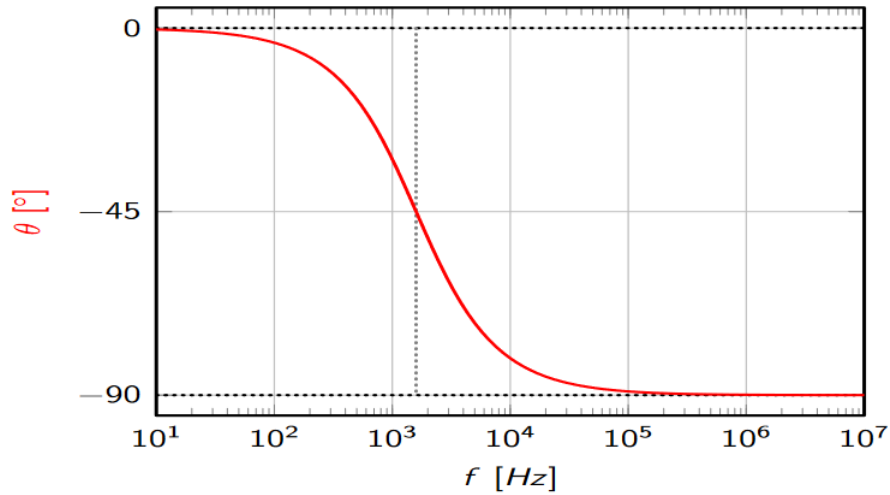


Bode plot — frekvenční charakteristika

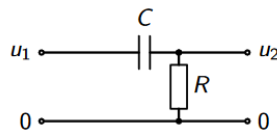


Integrační RC člunek — fázový posuv $u_1 \rightarrow u_2$

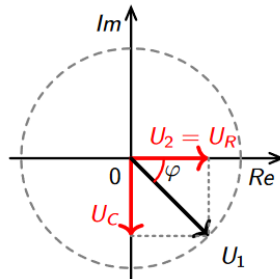
Fáze integračního RC ($R = 100\Omega$, $C = 1\mu F$)



- Derivační RC člunek



Impedance RC člunku: $Z_{RC} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$



o

Přenos:

$$G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}$$

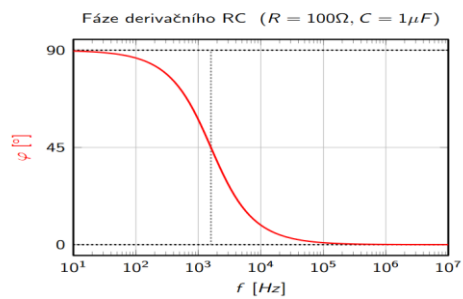
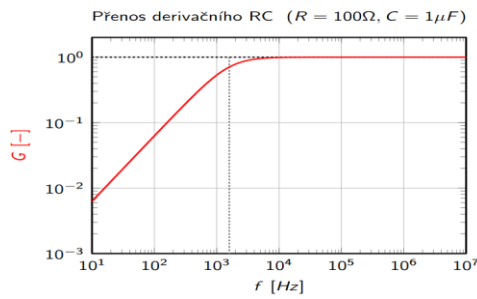
Fáze:

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{U_C}{U_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

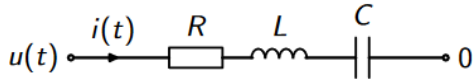
Mezní frekvence (platí $U_R = U_C$):

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

o



- Sériový RLC obvod



-
- Rovnice:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

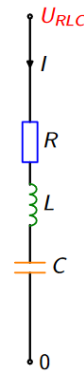
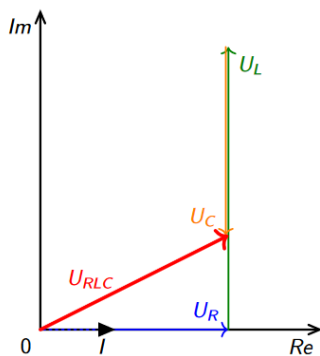
$$i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$$

- Impedance

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C$$

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

- Existuje kmitočet, při kterém se tento obvod tváří jen jako rezistor – rezonanční kmitočet
- Fázory



- Graf, když je kmitočet nad rezonančním

- Rezonance

Impedance RLC: $\mathbf{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$

Podmínka rezonance — imaginární část \mathbf{Z} je nulová, proto musí platit:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$$

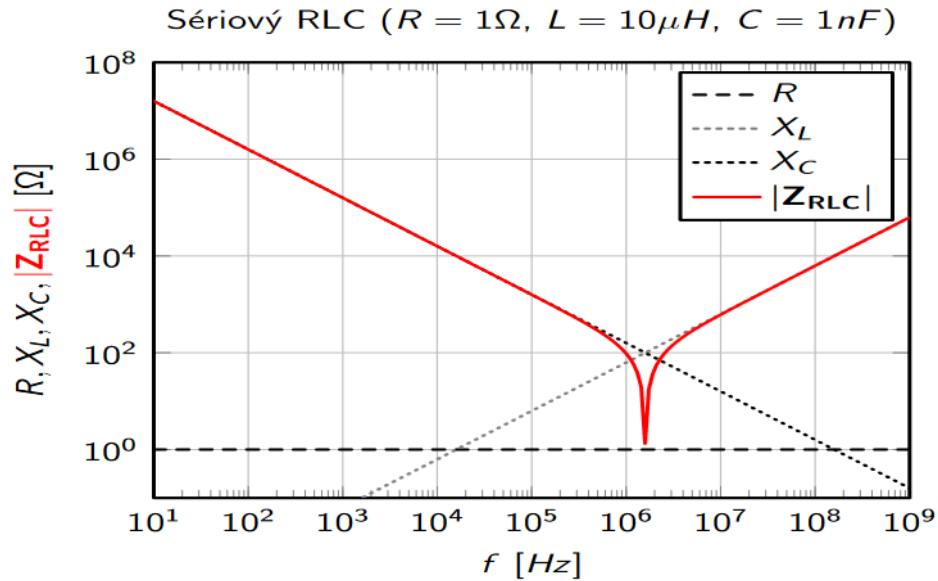
Z toho vypočteme rezonanční frekvenci:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a po úpravě:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Frekvenční závislost impedance sériového RLC



-
- Reálný kondenzátor se tváří jako RLC obvod

- Poznámky

- Existuje také *paralelní LC obvod*
- Příklady RC, RL, RLC: viz simulace
- Použití RC, RL, RLC článků:
 - Zesilovače: blokovací a vazební kondenzátory
 - Filtry: (různé topologie: Π , T, ...)
 - dolní propust (*low-pass*),
 - horní propust (*high-pass*),
 - pásmová propust (*band-pass*)
 - pásmová zadrž (*band-stop*)
- Parazitní indukčnosti, kapacity, odpory u *reálných* součástek

○

- **Výkon**

○ **Okamžitý výkon**

$$p(t) = u(t)i(t) = U_{ef} I_{ef} (\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)) \quad [W]$$

může být záporný, frekvence 2ω

φ = fázový posun proud–napětí

▪ $U_{ef} = \frac{U}{\sqrt{2}} = 0.707U$ je *efektivní napětí*

- Zdánlivý výkon: $S = U_{ef} I_{ef} \quad [VA]$
- Jalový výkon: $Q = U_{ef} I_{ef} \sin(\varphi) \quad [var]$
- Činný výkon: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt = U_{ef} I_{ef} \cos(\varphi) \quad [W]$
Účinník (*Power Factor*): $\cos(\varphi)$
- Platí Pythagorova věta: $S^2 = P^2 + Q^2$

○

○ **Poznámka: Kompenzace účinníku (Power Factor Correction, PFC)**

- **Fourierova řada**

Fourierova řada rozkládá periodickou funkci na součet harmonických složek:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n t)$$

Výpočet koeficientů a_n, b_n viz literatura

Např. pro obdélníkový signál s periodou T platí:

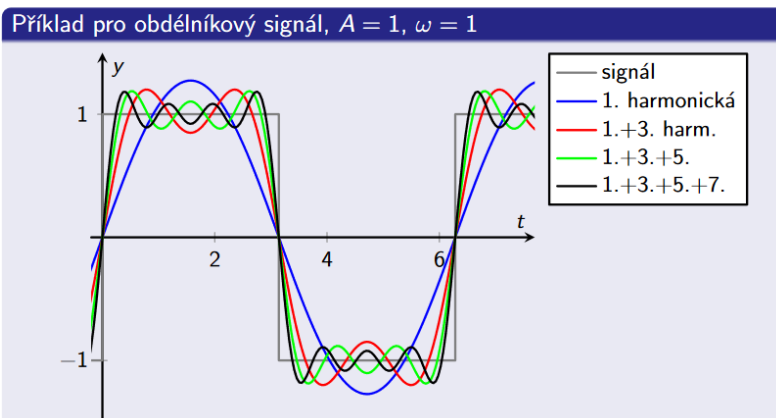
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)$$

viz následující obrázek

Literatura: mathworld.wolfram.com

○

Příklad Fourierovy řady



○

- **Poznámky:**
 - **Fourierova transformace — převod časového průběhu na spektrum**
 - **Spektrum signálu vyjadřuje, jaké frekvence jsou přítomny**
 - **Zpětná Fourierova transformace — převod spektra na časový průběh**
 - **Příklady použití:**
 - audio kodeky (MP3, AAC, Opus, ...),
 - analýza a zpracování signálů,
 - SDR (Software-Defined Radio)
 - ...
 - **Poznámky:**
 - **Proč obdélníkové signály — např. logické — ruší analog**
 - **Algoritmus FFT — rychlá Fourierova transformace**

- **Shrnutí**

- **Střídavé napětí a proud**
- **Frekvence, amplituda a fáze signálu**
- **Reaktance, impedance, fázový posun**
- **Fázorové diagramy** – použít v lehčích obvodech, když není úhel 90, tak radši komplexní čísla
- **Frekvenční analýza obvodů RC a RLC**
- **Výkon**
- **Fourierova řada**
- ...
- **Proč je dobré znát tyto základy**