Riešenie väčších matíc

- **Laplaceov rozvoj**
  - **Definícia**
    - Nech i, j ∈ {1, 2, . . . , n} a nech a_{ij} je prvok matice A. V matici A vynecháme i−ty riadok a j−ty stĺpec, dostaneme maticu prislúchajúcu k prvku a_{ij}. Jej determinant $|A_{ij}|$ nazývame **subdeterminant** matice A prislúchajúci prvku a_{ij} .
    - Prvok Aij = (−1)i+j · |Aij |
    - nazývame **algebraický doplnok** prislúchajúci k prvku a_{ij} .
  - Pre determinant štvorcovej matice stupňa n platí:
    - $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$
    - $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$
  - Príklad

Pomocou Laplaceovho rozvoja vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- *rozvoj urobte podľa 2. riadku*
- *rozvoj urobte podľa 3. stĺpca*

Riešenie.

- rozvoj podľa 2. riadku:

$$|A| = (-1).(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1).(-1).(2.3 - 1.0) + 2.1.(1.3 - 0.0) = 12.$$

- rozvoj podľa 3. stĺpca:

$$|A| = 0.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.(1.2 - (-2)) = 12.$$

- **Vlastnosti determinantov**
  - **Ak B vznikne z A výmenou dvoch riadkov, potom |B| = −|A|.**
  - **Ak A má dva rovnaké riadky, potom |A| = 0.**
  - **Ak B vznikne z A vynásobením jedného riadku číslom λ, potom |B| = λ|A|.**
  - **Determinant jednotkovej matice je rovný 1.**
  - **$|A| = |A^T|$.**
  - **Ak A obsahuje nulový riadok, potom |A| = 0.**
  - **Determinant sa nezmení, ak k ľub. riadku pripočítame násobok iného riadku.**
  - **Determinant trojuholníkovej matice je rovný súčinu prvkov na hlavnej diagonále.**
  - **|A.B| = |A|.|B|**
  - **Zhrnutie: Pri výpočte determinantu je vhodné upraviť maticu na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových operácií (treba si pamätať počet výmen riadkov) a na záver stačí vynásobiť prvky na diagonále.**

Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Na prvý pohľad by sa zdalo, že najvýhodnejšie je urobiť rozvoj podľa druhého stĺpca. Ak však pripočítame dvojnásobok druhého riadku k prvému, tak dostaneme maticu:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Na základe vlastností determinantov vieme, že $|A| = |A'|$.

- Preto urobíme rozvoj podľa prvého riadku:

$$|A| = |A'| = 7.(-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7.\left((-2).3.(-1) + 1.1.1 + 2.0.(-4) - (-1).3.2 - (-4).1.(-2) - (-1).0.1\right) =$$

$$= (-7).(-7) = 49.$$

- **Súčty determinantov**

Determinant na ľavej strane postupne zapisujeme ako súčet determinantov (využívame vlastnosti determinantov):

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

Teraz postupne rozpíšeme na súčty červený a modrý determinant.

- Najskôr červený-rozpíšeme prostredný stĺpec:

$$\begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ b_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a+b \\ b_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

Teraz v oboch determinantoch rozpíšeme posledný stĺpec:

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ b_1 & c_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a \\ b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & b \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

Posledné tri determinanty sú nulové (majú dva rovnaké stĺpce), teda už stačí vhodne vymeniť riadky a nezabudnúť na znamienka:

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Podobne upravíme aj modrý determinant:

$$\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ c_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} c & c & a \\ c_1 & c_1 & a_1 \\ c_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c & b \\ c_1 & c_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

■

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

■