

# Základy počítačové grafiky

## Reprezentace 3D objektů

Michal Španěl

Tomáš Milet



Ústav počítačové grafiky a multimédií

Brno 2021

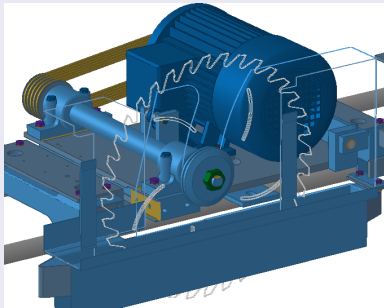
# Cíl přednášky

Pohybujeme se ve trojrozměrném světě, proto potřebujeme být schopni popsat trojrozměrné objekty, které se v něm vyskytují!

# Základní metody

## Konstruktivní geometrie - CSG

- Složení z jednoduchých 3D primitiv.

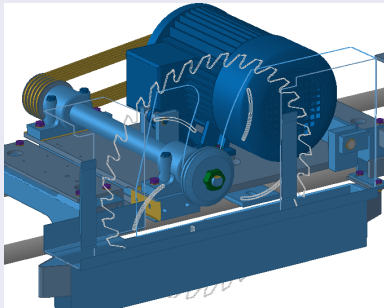


[www.varicad.cz](http://www.varicad.cz)

# Základní metody

## Konstruktivní geometrie - CSG

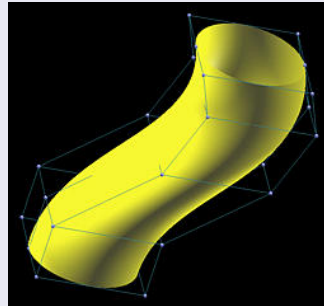
- Složení z jednoduchých 3D primitiv.



[www.varicad.cz](http://www.varicad.cz)

## Šablonování

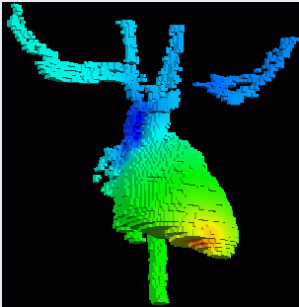
- Translační, rotační, potahování



# Základní metody, pokr.

## Dekompoziční modely

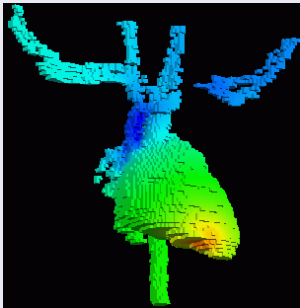
- Rozklad na objemové jednotky (voxely)



# Základní metody, pokr.

## Dekompoziční modely

- Rozklad na objemové jednotky (voxely)



## Hraniční reprezentace

- Popis povrchu objektu (polygonální modely, spline plochy, ...)

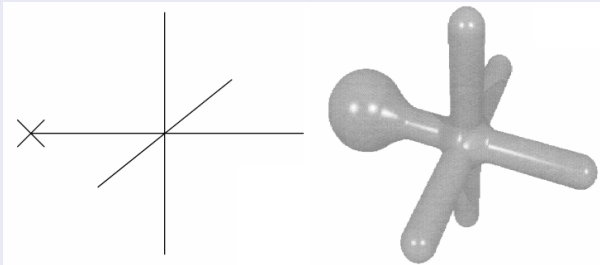


[www.harshcg.com](http://www.harshcg.com)

# Základní metody, pokr.

## Implicitní plochy

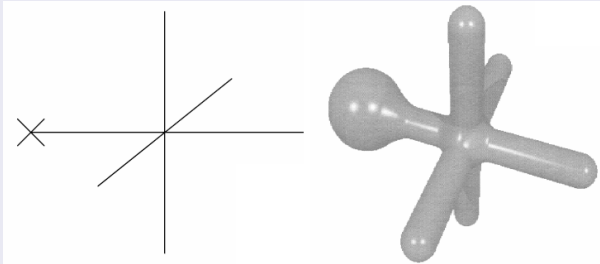
- Potenciální pole elementárních částic



# Základní metody, pokr.

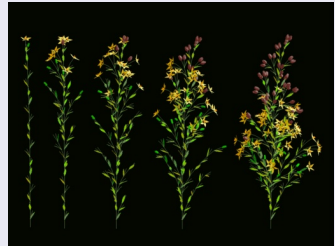
## Implicitní plochy

- Potenciální pole elementárních částic



## Fraktály

- Dynamické systémy, L-systémy, stochastické fraktály, atd.



# Obsah

- 1 Úvod
- 2 Konstruktivní geometrie
- 3 Šablonování
- 4 Dekompoziční modely
- 5 Hraniční modely
- 6 3D plochy
- 7 Implicitní plochy

# Požadavky na modely jdou proti sobě...

## Obecnost

Popis co nejrozsáhlejší třídy objektů.

## Úplnost a přesnost

Úplně a přesně popisuje daný objekt.

## Jednoznačnost

Lze vyhodnotit pouze jedním způsobem.

# Požadavky na modely jdou proti sobě...

## Obecnost

Popis co nejrozsáhlejší třídy objektů.

## Úplnost a přesnost

Úplně a přesně popisuje daný objekt.

## Jednoznačnost

Lze vyhodnotit pouze jedním způsobem.

## Kompaktnost

Malá paměťová náročnost.

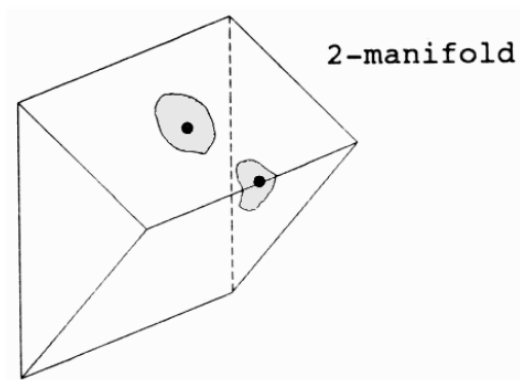
## Efektivnost zpracování

Možnost efektivní implementace operací s tělesem.

## Regulérnost

Nemožnost vytvořit nereálnou reprezentaci.

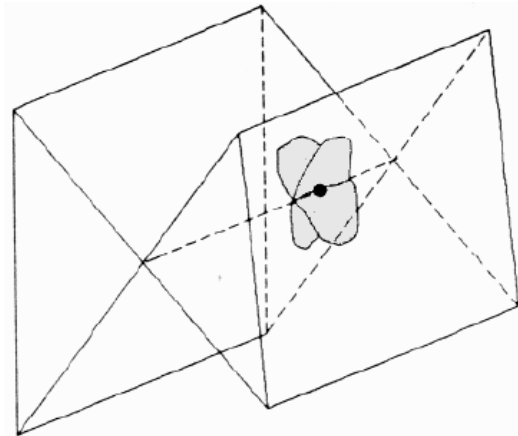
# Manifold objekty



## Manifold objekt (2-manifold)

- Vyrobitelný objekt.
- Tvořený vzájemně propojenými hraničními stěnami.
- Každá hrana sdílí pouze dvě stěny.
- Bod stěny má v množině sjednocených stěn otevřené okolí (topologie kruhu).

# Manifold objekty, pokr.



**nonmanifold**

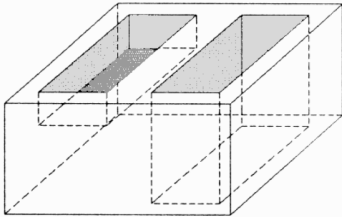
(FIT VUT v Brně)

## Non-manifold

- NevYROBITELNÝ objekt.
- Hrana/vrchol spojuje dvě části tělesa.

# Eulerovy rovnice - kontrola topologie objektu

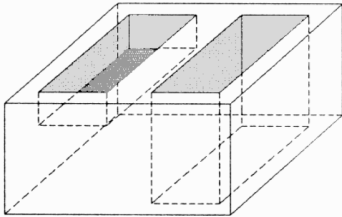
- Platí pro manifold tělesa, kde
  - hrana spojuje dva vrcholy,
  - ve vrcholu min. tři hrany,
  - stěny se neprotínají.



$$24 - 36 + 15 - 3 = 2(1 - 1)$$

# Eulerovy rovnice - kontrola topologie objektu

- Platí pro manifold tělesa, kde
  - hrana spojuje dva vrcholy,
  - ve vrcholu min. tři hrany,
  - stěny se neprotínají.



$$24 - 36 + 15 - 3 = 2(1 - 1)$$

## Rovnice

- Jednoduché objekty bez otvorů:

$$V - E + F = 2$$

- Obecná rovnice:

$$V - E + F - L = 2(R - H)$$

V ... počet vrcholů

E ... počet hran

F ... počet stěn

L ... počet vnitřních smyček ve stěnách

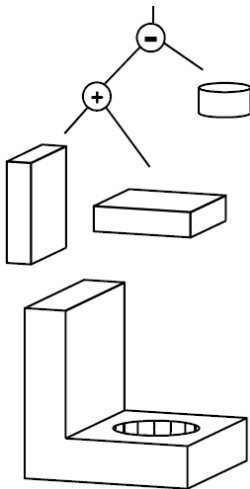
R ... počet samostatných bloků objektu

H ... počet děr

# Obsah

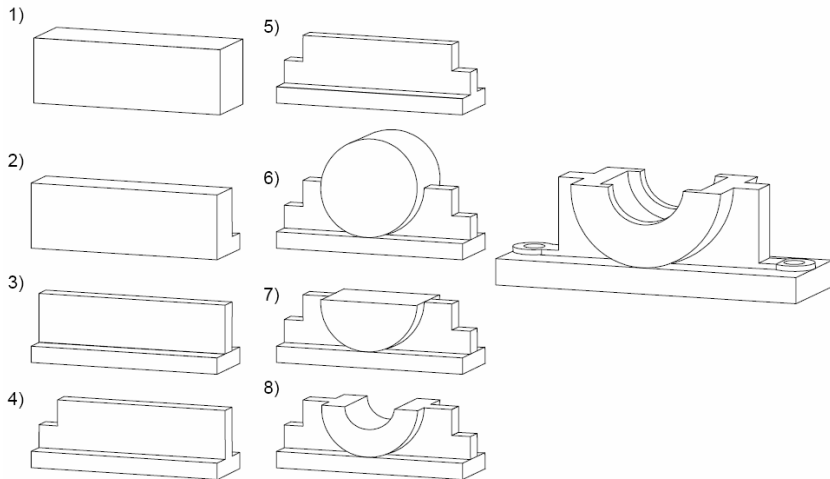
- 1 Úvod
- 2 Konstruktivní geometrie**
- 3 Šablonování
- 4 Dekompoziční modely
- 5 Hraniční modely
- 6 3D plochy
- 7 Implicitní plochy

# Konstruktivní geometrie – CSG



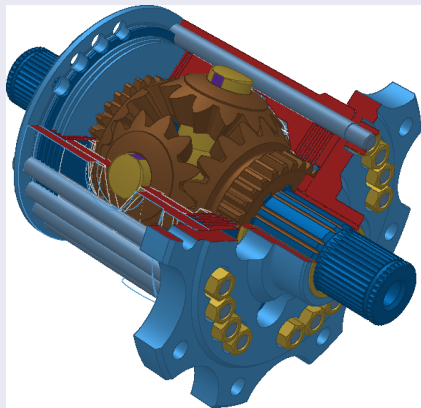
- CSG = Constructive Solid Geometry.
- **Objekt popsán stromem** ze
  - 3D primitiv (listy stromu),
  - transformací,
  - booleovských operací (uzly).
- Možnost vzniku singularit (regularizované operace).
- Po každé nové operaci probíhá regenerace stromu.
- Možnost parametrizace operací ve stromu – parametrické modelování (CAD/CAM).

# Příklad 1 – CSG model

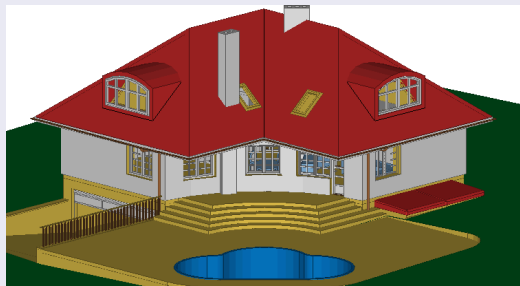


## Příklad 2 – CSG modely

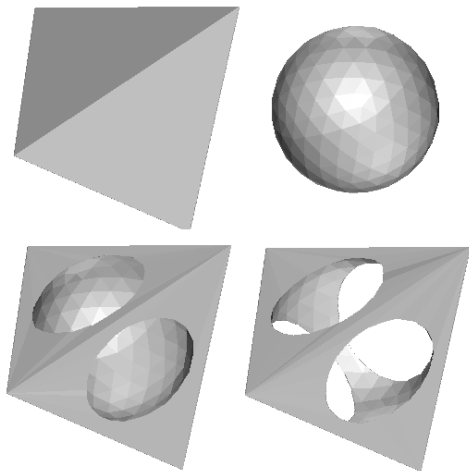
### Strojní inženýrství



### Architektura



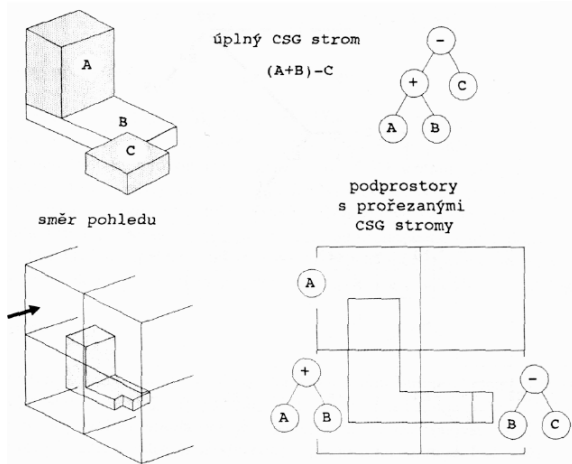
# Konstruktivní geometrie – CSG, pokr.



+/-

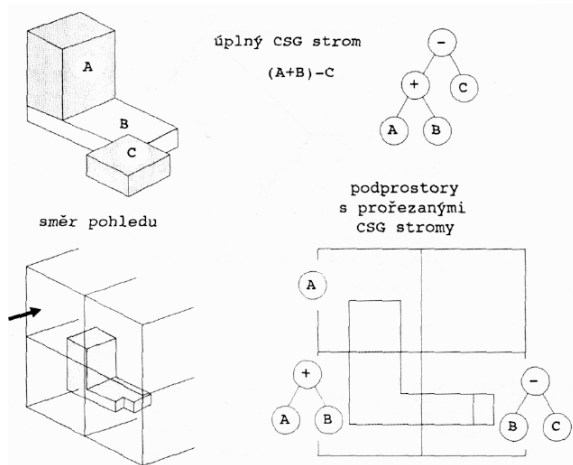
- Nejsou informace o povrchu objektu → převod na hraniční reprezentaci (např. polygonální model).
- Moderní implementace přidávají přímo operace s B-rep objekty.

# Dělení CSG modelu



- Rozdělení prostoru CSG modelu *oktalovým stromem* (octree).
- CSG strom rozdělený (tzv. *prořezaný*) na podstromy.

# Dělení CSG modelu

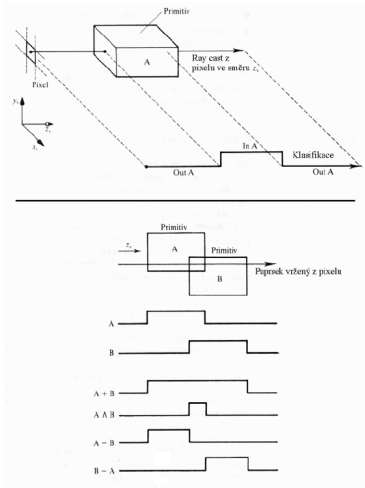


- Rozdělení prostoru CSG modelu *oktalovým stromem* (octree).
- CSG strom rozdělený (tzv. *prořezaný*) na podstromy.

+/-

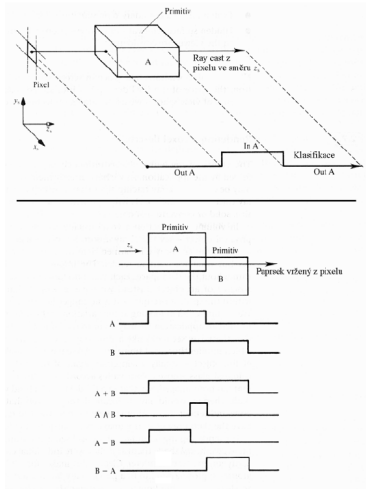
- Urychlení regenerace stromu při lokálních operacích.
- Urychlení zobrazování CSG modelu.

# Zobrazení CSG modelu



- CSG neobsahuje informace o povrchu → nelze použít grafickou pipeline pro trojúhelníky!

# Zobrazení CSG modelu

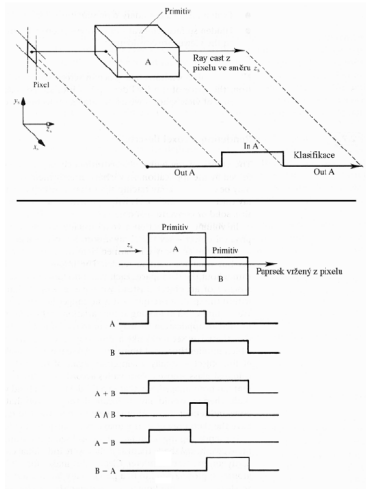


- CSG neobsahuje informace o povrchu → nelze použít grafickou pipeline pro trojúhelníky!

## Nepřímé zobrazení (nevhodné pro dynamické modely)

- Převod na polygonální model
- Převod na spline plochy (CAD/CAM)

# Zobrazení CSG modelu



- CSG neobsahuje informace o povrchu → nelze použít grafickou pipeline pro trojúhelníky!

## Nepřímé zobrazení (nevhodné pro dynamické modely)

- Převod na polygonální model
- Převod na spline plochy (CAD/CAM)

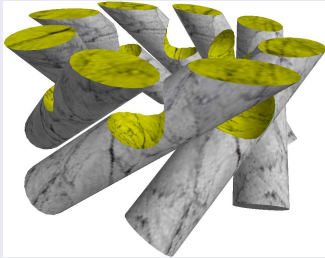
## Přímé zobrazení (lze využít GPU)

- Ray-casting, ray-tracing, ray-marching algoritmy
- Image-based rendering

# Zobrazení CSG modelu, pokr.

## OpenCSG – Image-based CSG rendering

- Využití offscreen renderingu a depth-bufferu



- Union ( $\cup$ )



- Intersection ( $\cap$ )



- Subtraction ( $-$ )

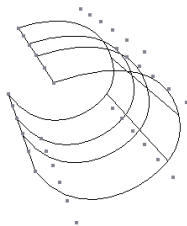


[www.opencsg.org](http://www.opencsg.org)

# Obsah

- 1 Úvod
- 2 Konstruktivní geometrie
- 3 Šablonování**
- 4 Dekompoziční modely
- 5 Hraniční modely
- 6 3D plochy
- 7 Implicitní plochy

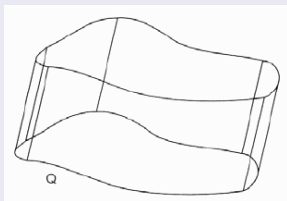
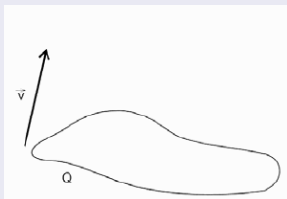
# Šablonování



- Pohyb křivky, plochy nebo tělesa po zvolené trajektorii.
- Nejčastěji posun 2D profilu po křivce.
- Šablonování může být součást CSG operací (primitiva tvořená šablonováním).
- Využívá se invariance spline křivek a ploch vůči lineárním transformacím.

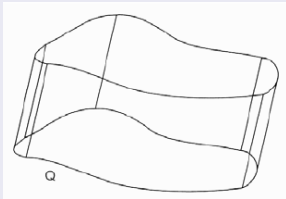
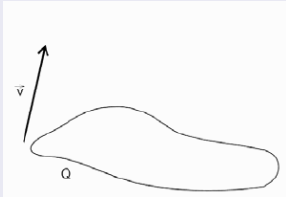
# Translační šablonování

## Pohyb po přímce

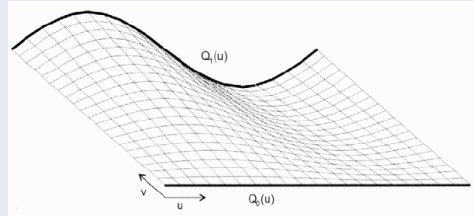


# Translační šablonování

## Pohyb po přímce

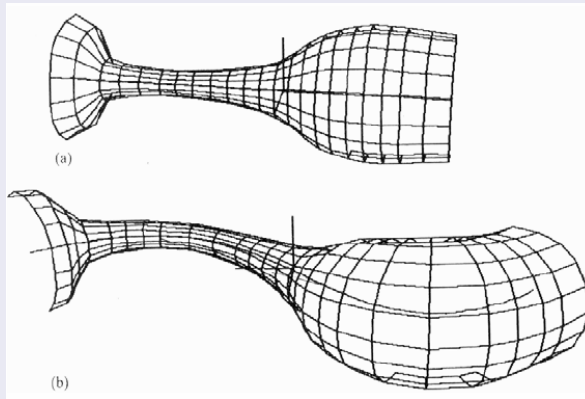


## S proměnlivou profilovou křivkou – potahování (angl. skinning)



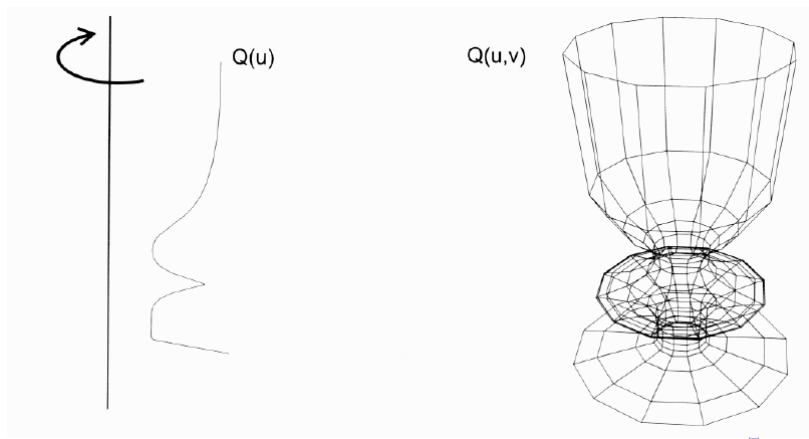
# Translační šablonování, pokr.

## Posun po obecné křivce



# Rotační šablonování

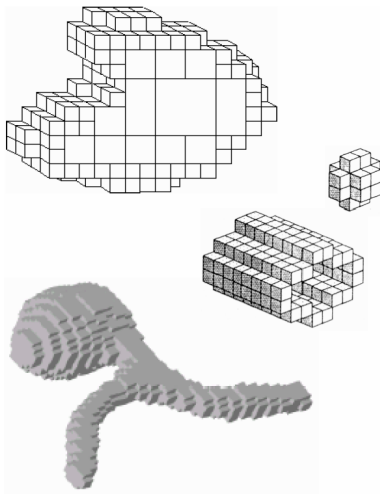
- Využívá se vlastností NURBS křivek a ploch reprezentovat přesně kružnici.



# Obsah

- 1 Úvod
- 2 Konstruktivní geometrie
- 3 Šablonování
- 4 Dekompoziční modely**
- 5 Hraniční modely
- 6 3D plochy
- 7 Implicitní plochy

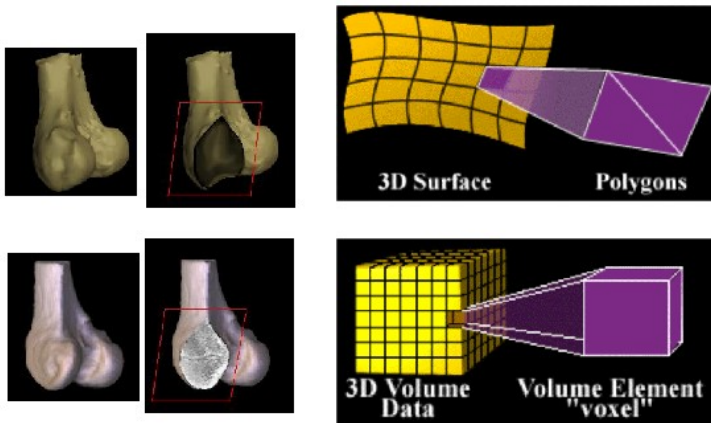
# Dekompoziční modely



- Diskrétní popis objektu dekompozicí na elementární objemové jednotky (krychle, hranoly).
- Vzorkování objektu, vyčíslení obsazeného objemu, ...
- **Voxel** – Volumetric Pixel.
- *Voxel model, volumetric data, volume rep.*
- Nejčastěji pravidelná kartézská mřížka.

# Hraniční vs. objemové modely

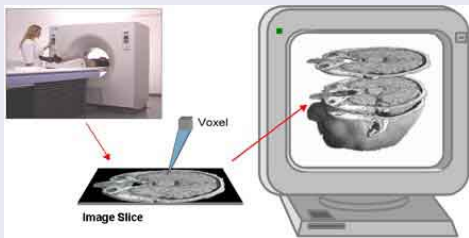
- Objemové modely – informace o vnitřní struktuře objektu.



# Použití a zdroje objemových dat

## Uložení, zpracování a vizualizace naměřených 3D dat

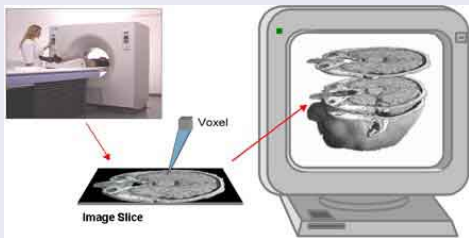
- Geologie
- Medicína (CT/MR, apod.)
- Strojírenství



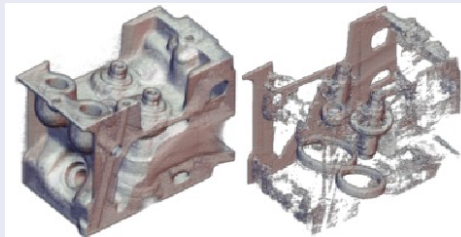
# Použití a zdroje objemových dat

## Uložení, zpracování a vizualizace naměřených 3D dat

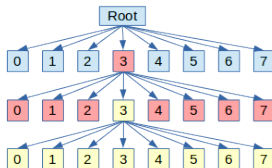
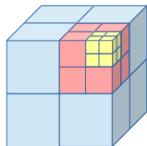
- Geologie
- Medicína (CT/MR, apod.)
- Strojírenství



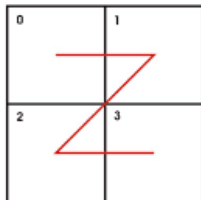
## Strojírenství – CT



# Uložení dat

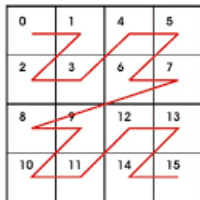


Level 1



a

Level 2

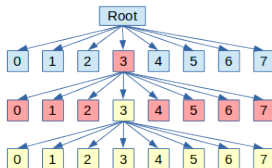
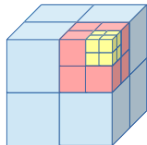


b

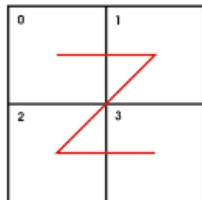
## 3D pole diskrétních hodnot

- Sekvenční pole hodnot.
- Velká náročnost na paměť.
- Vysoká rychlost přístupu.

# Uložení dat

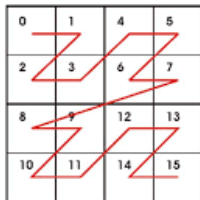


Level 1



a

Level 2



b

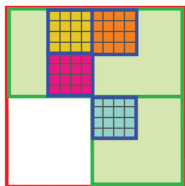
## 3D pole diskrétních hodnot

- Sekvenční pole hodnot.
- Velká náročnost na paměť.
- Vysoká rychlost přístupu.

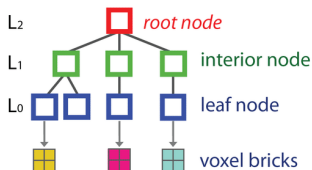
## Oktalový strom (angl. *octree*)

- Rekurzivní dělení BB na 8 částí.
- Vhodné pro malou hustotu dat.
- Problematictější procházení objemem.

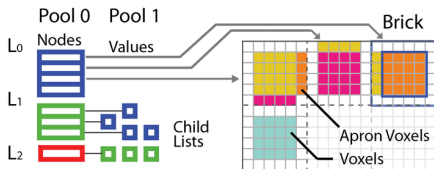
# Uložení dat, pokr.



a) Spatial domain



b) Tree schematic



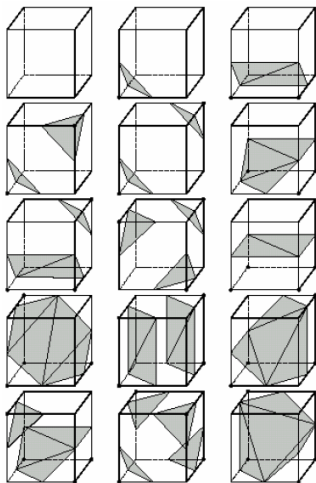
c) GVDB Data Structure

d) GVDB Voxel Atlas

## Subvoxely

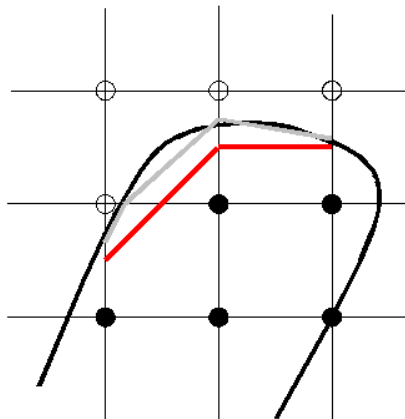
- Kombinace obou možností.
- Různá míra použití Octree a 3D pole.
- Vhodné pro paralelizaci.

# Marching Cubes - Polygonální model z voxelů



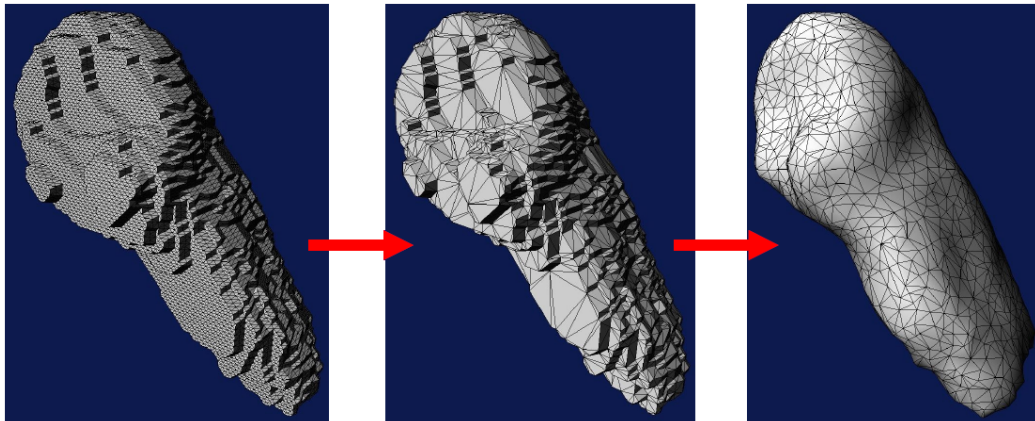
- Lorensen & Cline, 1987
- Nalezení a polygonizace **isoplochy** procházející objemem.
- *Pochodující kostku* tvoří 8 sousedních voxelů.
- Vyhodnocení průchodu isoplochy podle stavu obsazení vrcholů kostky.
- Postupné posouvání kostky objemem.

# Marching Cubes, pokr.



- Velký počet povrchových trojúhelníků modelu → *decimace*.
- Vrstevnatý charakter povrchu → *vyhlazení*.
- Varianta "Marching tetrahedra".

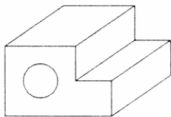
# Marching Cubes, pokr.



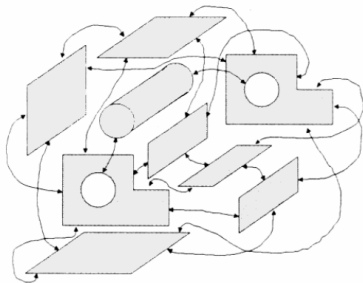
# Obsah

- 1 Úvod
- 2 Konstruktivní geometrie
- 3 Šablonování
- 4 Dekompoziční modely
- 5 Hraniční modely**
- 6 3D plochy
- 7 Implicitní plochy

# Hraniční reprezentace – B-rep



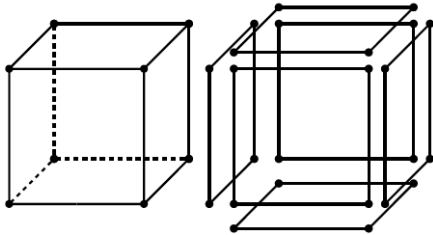
těleso



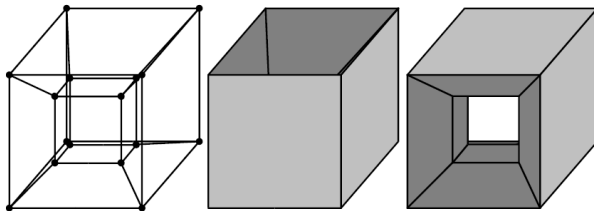
model hraniční reprezentace

- *B-rep = Boundary Representation*
- Objekt popsán prostřednictvím svého povrchu – hranice.
- Informace o vnitřní struktuře objektu není uložena.
- Objekty definovány pomocí
  - *vrcholů* (body),
  - *hran* (úsečky, křivky),
  - *stěn* (polygony, spline plochy).

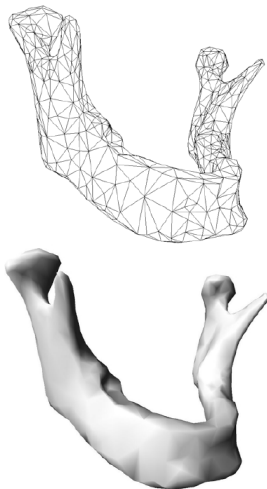
# Drátový model je nejednoznačný...



- Objekt popsán pomocí *vrcholů* a *hran*.
- Málo topologických informací → nejednoznačnost modelu.
- Vhodné pro rychlé orientační zobrazení objektů.

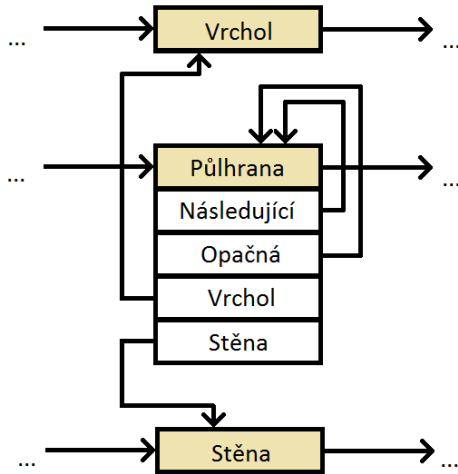


# Polygonální model



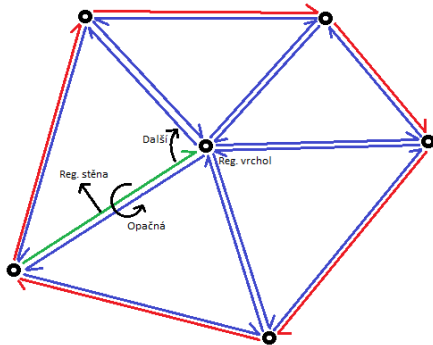
- Jednoznačný popis objektu pomocí:
  - vrcholů,
  - *někdy hran (úsečky),*
  - stěn (polygony – troj(čtyř)úhelníky)
- Malá přesnost – lineární aproximace povrchu.
- Pro některé aplikace (3D tisk) nutnost dodržet a ověřovat regulérnost – uzavřenost, atd.
- *Přímá podpora zobrazení v GPU.*
- Vhodné pro interaktivní zobrazení.

# Půlhrana (half-edge) – když potřebuji s geometrií pracovat...



- Datová struktura pro reprezentaci polygonálního modelu - OpenMesh, CGAL, a další knihovny
- Hrana je reprezentována dvěma půlhranami
- Tři lineární seznamy:
  - vrcholů, půlhran a stěn.
- Definuje:
  - Následující půlhrana,
  - Protější půlhrana,
  - Registrovaný bod.
  - Registrovaná stěna

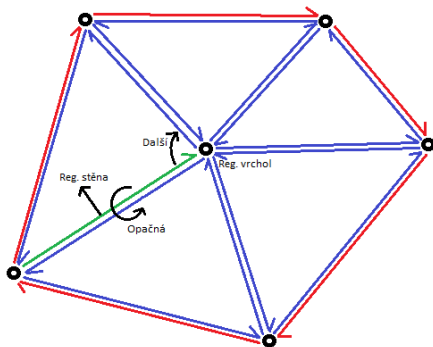
# Příklad – Půlhrana



- Možné dotazy:

- Hrany okolo vrcholu
- 1-okolí vrcholů okolo vrcholu
- Stěny okolo vrcholu
- Stěny okolo stěny
- Vrcholy okolo stěny
- ...

# Příklad – Půlhrana



## Možné dotazy:

- Hrany okolo vrcholu
- 1-okolí vrcholů okolo vrcholu
- Stěny okolo vrcholu
- Stěny okolo stěny
- Vrcholy okolo stěny
- ...

+/-

- Minimalizuje počet odkazů při zachování jednotlivých typů dotazů.
- Pouze manifold objekty.
- Jednoduchá implementace dotazů.

# (Diskrétní) Level of Detail – LOD



141 788 polygons



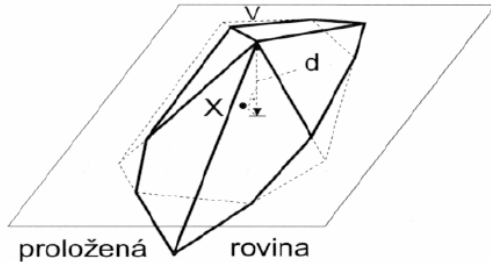
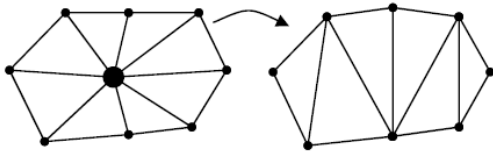
35 305 polygons



8 993 polygons

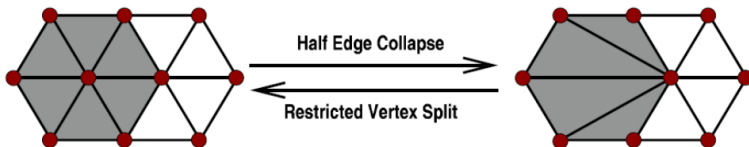
- **Vzdálené objekty není potřeba zobrazovat v plné kvalitě.**
- Vytváří se *několik úrovní detailu (LOD)*.
- Přepínání podle vzdálenosti.
- Redukce nepodstatných detailů (dle aplikace).
- Redukce počtu prvků, při zachování tvaru objektu (*nejčastěji redukce počtu trojúhelníků*).
- Míra redukce až 99% při 1% chyby.

# LOD – Eliminace vrcholů



- Schroeder, W.: Decimation of Triangle Meshes, 1992.
- Kritérium je **vzdálenost vrcholu od průměrné lokální roviny**.
- Ohodnocené vrcholy se seřídí a postupně eliminují.
- Vzniklá díra se záplatuje.

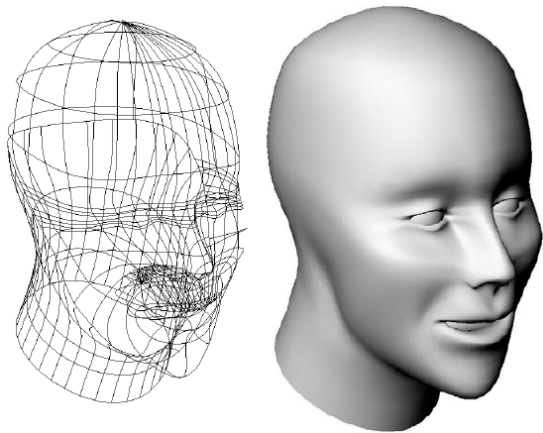
# Kontinuální LOD



+/-

- Jak zařídit plynulý přechod mezi LOD?
- Ukládání rozdílů úrovní modelů (tzv. *progressive meshes*).
- Užitečné i pro přenos a postupné kreslení modelu
- Nebo pro hierarchické počítání (např. radiozita)

# Hraniční spline model



- Objekt definován pomocí:
  - vrcholů,
  - *někdy hran* (křivky),
  - stěn (spline plochy)
- Přesnost modelu dána přesností aproximace spline ploch.
- Nutnost dodržet a ověřovat regulérnost – uzavřenost.
- Pro zobrazení se většinou převádí na polygonální model.
- Vhodné pro přesné geometrické modelování (CAD/CAM).

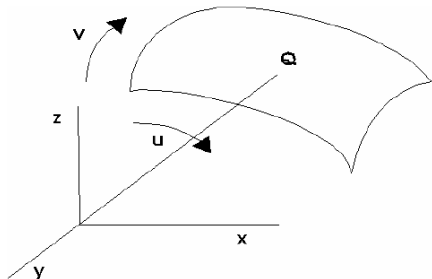
# Obsah

- 1 Úvod
- 2 Konstruktivní geometrie
- 3 Šablonování
- 4 Dekompoziční modely
- 5 Hraniční modely
- 6 3D plochy**
- 7 Implicitní plochy

# 3D plochy

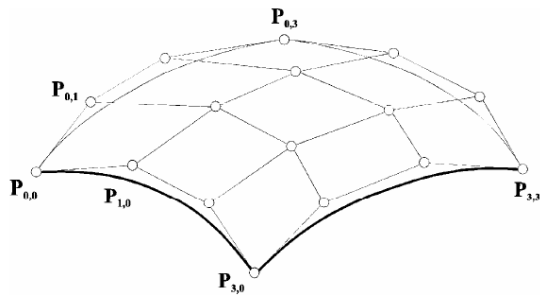
$$Q(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$$

$$u \in \langle 0, 1 \rangle, v \in \langle 0, 1 \rangle$$



- Rozšíření parametrických polynomiálních křivek.
- *Bodová rovnice plochy*  $Q(u, v)$ .
- Plocha definována:
  - *bázovou maticí* (polynomy),
  - *sítí řídících bodů* (matice).
- V praxi spojování ploch ze segmentů, *záplat* (*patch*).
- Spojitost záplat –  $C^0, C^1, C^2$ .
- *Interpolační a aproximační* plochy.
- Pro zobrazení se užívá převod na polygony nebo ray-casting.

# Bézierovy plochy



$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

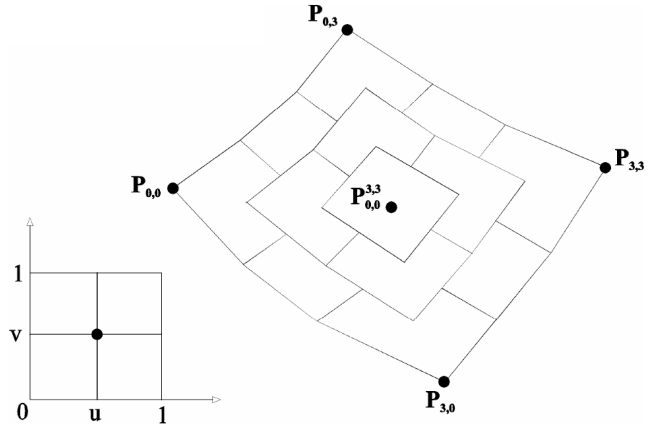
Pro kubiku:

$$P(u, v) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_B^T \cdot \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_B^T \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Aproximační plocha, analogie Bézierových křivek.
- Matice 4x4 řídících bodů – *řídící polygon*.
- Navazování plátů, vlastnosti polynomů a invariance k transformacím jako u křivek.
- Racionální a neracionální.

# Algoritmus de Casteljau pro Bézierovy plochy

- Výpočet bodu na Bézierově ploše.
- Princip podobný křivkám.



# NURBS plochy

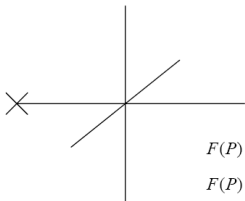
- Aproximační plocha, analogie NURBS křivek.
- Matice 4x4 řídících bodů – *řídící polygon*.
- *Dva uzlové vektory*  $U, V$ .
- Vlastnosti polynomů podobně jako u křivek (nezápornost, konvexní obálka, rekurence).
- Invariance k lin. transformacím (i perspektivní).

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} N_i^k(u) N_j^l(v)$$

# Obsah

- 1 Úvod
- 2 Konstruktivní geometrie
- 3 Šablonování
- 4 Dekompoziční modely
- 5 Hraniční modely
- 6 3D plochy
- 7 Implicitní plochy**

# Implicitní plochy - P. Bourke, 1997



$$F(P) = 0$$

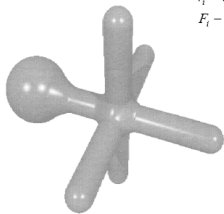
$$F(P) = \sum_{i=1}^n c_i F_i(r_i)$$

$n$  – počet prvků kostry

$c_i$  – velikost potenciálu prvku  $i$

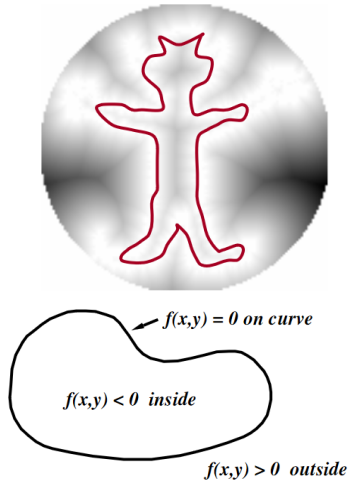
$r_i$  – vzdálenost bodu  $P$  od prvku  $i$

$F_i$  – směšovací funkce



- Potenciální pole elementárních částic – J. Blinn, 1982: *Bloppy objects*,
- Modelování pomocí základních prvků (kostry)
- Kolem každého prvku je *potenciální pole*
- Povrch objektu je v místě, kde intenzita pole  $F(P) = 0$

# Implicitní funkce $F(x, y, z)$

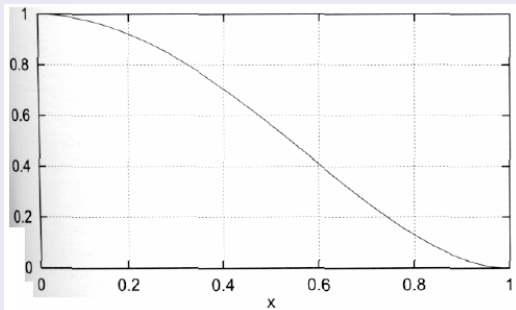


- Povrch objektu je v místě, kde  $F(x, y, z) = 0$
- Zobrazení:
  - Převodem na B-rep (např. Marching Cubes)
  - Ray-casting, ray-tracing, ray-marching, atd.

# Směšovací funkce

## Příklad směšovací fce

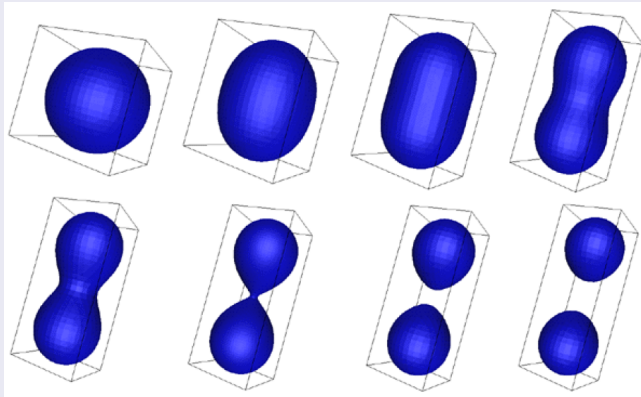
- *Omezená funkce* – ve vzdálenosti  $r_i > R$  je rovna nule



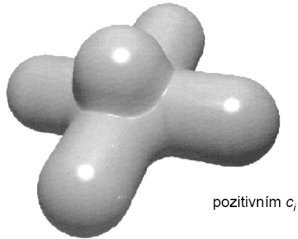
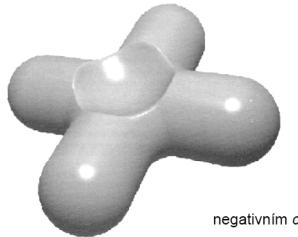
$$F_i(r_i) = -\frac{4}{9} \frac{r^6}{R^6} + \frac{17}{9} \frac{r^4}{R^4} - \frac{22}{9} \frac{r^2}{R^2} + 1$$

# Směšovací funkce, pokr.

## Vliv vzdálenosti

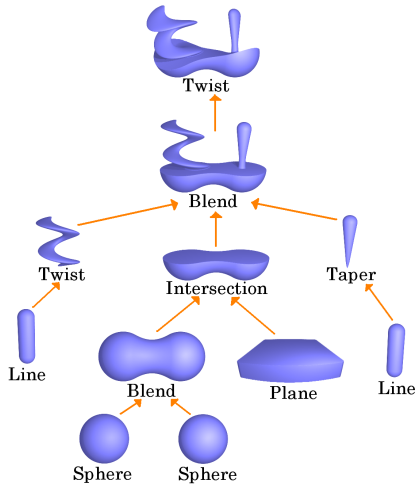


# Koeficient $c_i$

pozitivním  $c_i$ negativním  $c_i$ 

- Určuje vliv, dosah a sílu potenciálu  $i$ -tého prvku kostry.
- Znaménko určuje "přírůstek" nebo "úbytek" potenciálu.

# Implicitní plochy a CSG



- Implicitní plochy dělí prostor na "uvnitř" a "vně".
- Lze je snadno kombinovat s CSG stromy.

# Příklad – Implicitní plochy

