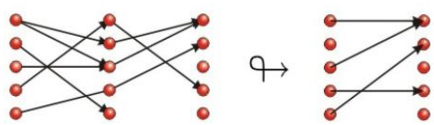
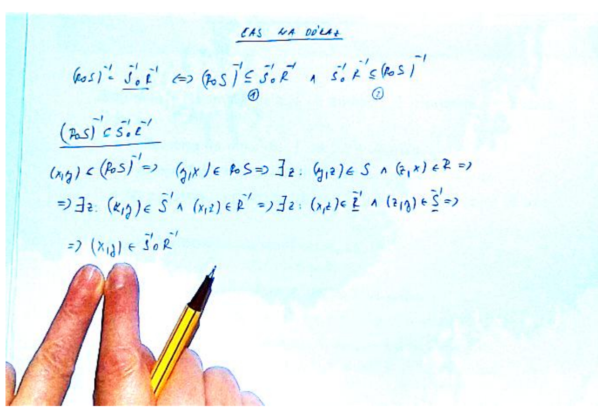
Relácie

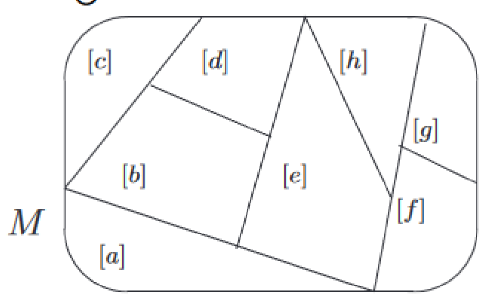
- **Binárnou reláciou** nazývame každú množinu usporiadaných dvojíc.
    - $\{1,2,3,\ldots,8\} \times \{A,B,C,D\}$
    - $X \times Y$
- ak R je relácia, píšeme aRb alebo [a, b] ∈ R, čítame: prvok a je v relácii R s prvkom b.
- Nech R je binárna relácia. **Definičným oborom** (prvým oborom) nazývame množinu D(R), ktorá je daná takto:
  $$a \in D(R) \Leftrightarrow \exists b;\ aRb.$$
- **Obor hodnôt** (druhý obor) relácie R je množina H(R) daná takto:
  $$b \in H(R) \Leftrightarrow \exists a;\ aRb.$$
- Nech A, B sú množiny a R je binárna relácia. Ak D(R) ⊆ A, H(R) ⊆ B hovoríme, že R je relácia z množiny A do množiny B.
- Nech n ∈ N, n− árnou reláciou nazývame každú množinu usporiadaných n−tíc.
- **Typy relácií**
    - **Definícia.** Nech R je relácia na množine A, tak aj $\overline{R}$ = A^2 \ R je relácia na A. Hovoríme, že $\overline{R}$ je **doplnkovou** (komplementárnou) reláciou k relácii R na množine A.
    - **Definícia. Identickou** (diagonálnou) reláciou na množine A nazývame reláciu Δ_A = {[a, a]; a ∈ A}
    - **Inverzná relácia**
        - Definícia. Nech R je relácia. Reláciu R^{-1} = {[a, b]; [b, a] ∈ R} nazývame **inverzná** relácia k R.
        - Veta. Zrejme platí $(R^{-1})^{-1}$ = R

- **Skladanie relácií**
    - Definícia. Nech R, S sú relácie. Reláciu
      R ∘ S = {[a, c]; ∃b [a, b] ∈ S ∧ [b, c] ∈ R} nazývame **zloženou** reláciou z relácie R a S.
    - 
    - **Veta**. Pre ľubovoľné relácie R, S, T platí
        - (R ∘ S) ∘ T = R ∘ (S ∘ T)
        - $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
            - Dôkaz:
    - 

- **Špeciálne vlastnosti relácií**
    - **Definícia.** Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je
        - **Reflexívna** na množine A, ak ∀a ∈ A; aRa, - na diagonále v rozpise samé jednotky
        - **Ireflexívna** na množine A, ak ∀a ∈ A; a$\overline{R}$a, - na diagonále v rozpise samé nuly
        - **Symetrická** na množine A, ak ∀a, b ∈ A; aRb ⇒ bRa, rozpis je zrkadlový podľa diagonály
        - **Súvislá** na množine A, ak ∀a, b ∈ A; a ≠ b ⇒ aRb ∨ bRa
        - **Trichotomická** na množine A, ak pre každé dva prvky a, b ∈ A platí práve jeden zo vzťahov:
            - a = b, aRb, bRa.
        - **Antisymetrická** na množine A, ak ∀a, b ∈ A; aRb ∧ bRa ⇒ a = b, - nesmú byť dve symetrické jednotky v rozpise
        - **Tranzitívna** na množine A, ak ∀a, b, c ∈ A; aRb ∧ bRc ⇒ aRc,
- **Uzávery**
    - **Definícia**. Nech R je binárna relácia na M .
    - **Reflexívny uzáver** R je relácia R ∪ {(x, x) | x ∈ M }.
    - **Symetrický uzáver** R je relácia
        - $\overleftrightarrow{R} = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \; nebo \; (y,x) \in R\}.$
    - **Tranzitívny uzáver**
        - **Tranzitívny uzáver** R je relácia $R^{+} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^{i}(R)$, kde $\mathcal{T}$ je funkcia, ktorá pre každú binárnu reláciu S vráti reláciu

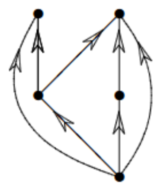
          $$\mathcal{T}(S) = S \cup \{(x,z) \mid \text{ existuje } y \text{ také, že } (x,y),(y,z) \in S\}$$

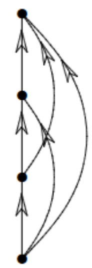
          $\mathcal{T}^{i} = \underbrace{\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{i}$ je i-krát iterovaná aplikácia funkcie $\mathcal{T}$.

- **Rozklad množiny**
    - **Definícia**. Nech A je neprázdna množina. Systém S podmnožín množiny A sa nazýva rozklad množiny A, ak
        - $\emptyset \notin S$
        - $\forall B, C \in S; B \neq C \Rightarrow B \cap C = \emptyset$
        - $\bigcup S = A$
        - 

- **Relácia ekvivalencie a rozklad množiny**
    - **Definícia.** Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že R je relácia **ekvivalencie** na A, ak R je reflexívna na A, symetrická a tranzitívna.
    - **Veta.** Nech R je relácia ekvivalencie na množine A. Pre ľubovoľný prvok $a \in A$ označíme $\overline{a} = \{x \in A; xRa\}$, potom $S = \{\overline{a}; a \in A\}$ je rozklad množiny A.
    - **Definícia.** Nech R je relácia ekvivalencie na množine A. Množinu $\overline{a} = \{x \in A; xRa\}$ nazývame trieda rozkladu množiny A podľa ekvivalencie R, daná prvkom a. Systém $\{\overline{a}; a \in A\}$ budeme označovať A/R a nazývať faktorová množina množiny A podľa R.

- **Usporiadanie a usporiadané množiny**
    - Definícia. Relácia R ⊆ M × M je **čiastočné usporiadanie** práve keď R je **reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.**
    - Tieto tri vlastnosti musia byť splnené a overené k dôkazu toho, že daná relácia R je usporiadaním.
    - **Usporiadaná množina**
        - **Definícia. Usporiadaná množina** je dvojica $(M, \preceq)$, kde M je množina a $\preceq$ je (čiastočné) usporiadanie na M.

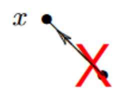




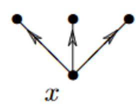
        - **Definícia.** Usporiadanie $\preceq$ na M je **lineárne (úplné)**, ak každé dva prvky M sú v $\preceq$ porovnateľné.
        -
        - **Ďalšie pojmy usporiadaných množín**

Nech $(M, \preceq)$ je usporiadaná množina. Prvok $x \in M$ je:

- **minimálny** práve keď pre každé $y \in M$ platí, že ak $y \preceq x$, tak $x \preceq y$.

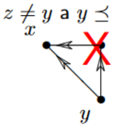


- **maximálny** práve keď pre každé $y \in M$ platí, že ak $x \preceq y$, tak $y \preceq x$.
- **najmenší** práve keď pre každé $y \in M$ platí, že $x \preceq y$.

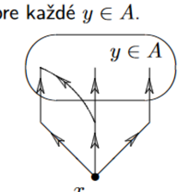


- **najväčší** práve keď pre každé $y \in M$ platí, že $y \preceq x$.
    - **Minimálny** – pod daným prvkom nič nie je (okrem samého seba)
    - **Maximálny** – nad daným prvkom nič nie je (okrem samého seba)
    - **Najmenší a Najväčší** – môže byť iba jeden, všetky prvky sú nad ním

- **pokrýva** $y \in M$ práve keď $x \neq y$, $y \preceq x$ a neexistuje žiadne $z \in M$ také, že $x \neq z \neq y$ a $y \preceq z \preceq x$.

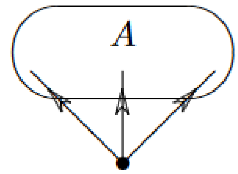


- je **dolné ohraničenie (dolní závora, mez)** množiny $A \subseteq M$ práve keď $x \preceq y$ pre každé $y \in A$.



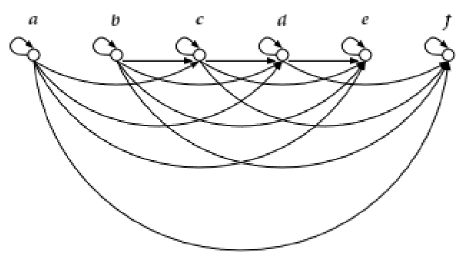
- je **horné ohraničenie (horní závora, mez)** množiny $A \subseteq M$ práve keď $y \preceq x$ pre každé $y \in A$.
    - **Pokrýva** – je práve pod prvkom, nie je žiaden medzi nimi
    - **Dolné ohraničenie** – Je pod všetkými prvkami danej množiny
    - **Horné ohraničenie** – Je nad všetkými...

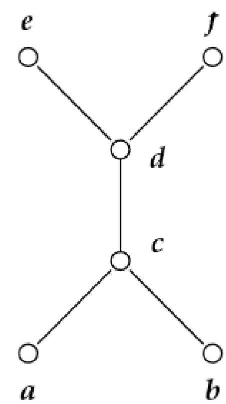
- je **infimum** množiny $A \subseteq M$ práve keď x je najväčšie dolné ohraničenie (dolní závora) množiny A.



- je **supremum** množiny $A \subseteq M$, práve keď x je najmenšie horné ohraničenie (horní závora) množiny A.

-
    - **Infinum** – najnižšie položené ohraničenie
    - **Supremum** – Najvyššie položené ohraničenie
- **Hasseovské diagramy**
    - Motiváciou zavedenia tzv. **Hasseovských diagramov** usporiadaných množín sú prehľadnejšie obrázky ako u grafov relácií.





    -
    - **Hasseovský diagram** konečnej usporiadanej množiny (M, ⪯) je (jednoznačné) grafické znázornenie, ktoré vznikne takto:
        - Do prvej ”horizontálnej vrstvy” zakreslíme body odpovedajúce minimálnym prvkom (M, ⪯).
        - Ak už máme ”vrstvu” i, tak do ”vrstvy” i + 1 (ktorá je ”nad” vrstvou i) zakreslíme všetky nezakreslené prvky, ktoré pokrývajú iba prvky ”vrstiev” ≤ i. Ak prvok x ”vrstvy” i + 1 pokrýva prvok y ”vrstvy” ≤ i, spojíme x a y neorientovanou hranou (tj. ”čiarou”)

- **Ďalšie typy usporiadaní**
    - **Kvázi-usporiadanie** - R je reflexívna a tranzitívna
    - **Dobré usporiadanie** - každá podmnožina obsahuje najmenší prvok

- **Zobrazenia**
    - Binárnu reláciu f nazývame zobrazením vtedy, keď o nej platí:
        - [a, b] ∈ f ∧ [a, c] ∈ f ⇒ b = c.
        - $f(a) = b \wedge f(a) = c \Longrightarrow b = c$

- **Obraz množiny:**
  - f (M) = {b; ∃a ∈ M f (a) = b}.
- **Úplný vzor množiny:**
  - $f^{-1}(P)$ = {a; ∃b ∈ P f (a) = b}.

- **Vlastnosti zobrazení**
  - **Definícia.**
    - Ak o zobrazení f platí
      - ∀a, b ∈ D(f); $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$,
    - hovoríme, že je **prosté**, alebo **injekcia**
    - Nech f : A → B. Ak platí, že H(f) = B hovoríme, že f je zobrazenie z množiny A **na (surjekcia)** množinu B. Ak D(f) = A hovoríme, že f je zobrazenie množiny A do množiny B. Ak platí, že D(f) = A, H(f) = B hovoríme, že f je zobrazenie množiny A **na (surjekcia)** množinu B
    - Prosté zobrazenie množiny A **na** množinu B nazývame **vzájomne jednoznačným zobrazením** A **na** B alebo **bijekciou** A na B.
  - **Definícia**. Ak existuje **bijekcia** množiny A na množinu B hovoríme, že množina A je **ekvivalentná** s množinou B a píšeme **A ∼ B.**
  - **Veta. Pre ľubovoľné množiny A, B, C platí**
    - A ∼ A
    - A ∼ B ⇒ B ∼ A
    - A ∼ B ∧ B ∼ C ⇒ A ∼ C
  - **Definícia.** Nech je dané zobrazenie f : A → B; na množine A definujeme reláciu ∼ podmienkou:
    - $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.
  - Relácia ∼ je ekvivalencia na A a faktorová množina A/ ∼ je ekvivalentná s oborom hodnôt H(f).

- **Mohutnosti množín**
  - **Konečné množiny**
  - **Nekonečné množiny**
    - **Spočítateľné** (existuje bijekcia s množinou prir. čísel) (**Sem patrí aj množina celých (0,1,-1,2,-2) a aj racionálnych čísel**)
    - **Nespočítateľné** (neexistuje bijekcia s množinou prir. čísel)
      - Ak (0,1) ∈ ℝ je nespočítateľná tak aj ℝ je nesp.
      - **Dôkaz sporom:**
        - **Predpoklad že (0,1) je spočítateľná množina**
        - $k_1 = 0.123456 \ldots$
        - $k_2 = 0.24387059 \ldots$
        - $k_3 = 0.56327128 \ldots$
        - $k_4 = 0.11223344 \ldots$
        - $k_5 = 0.233456 \ldots$
        - **Nové číslo:** $0.14325 \ldots$
        - **Ďalšie nové číslo – ak je číslo v rovnakom indexe 3 tak napišem 7, inač napišem 3:** $0.33733 \ldots$
        - Keďže sa líši od každého $\mathbf{k_i}$ čísla v **i indexe**, tak **nemôže byť už napísané**, je to **spor**