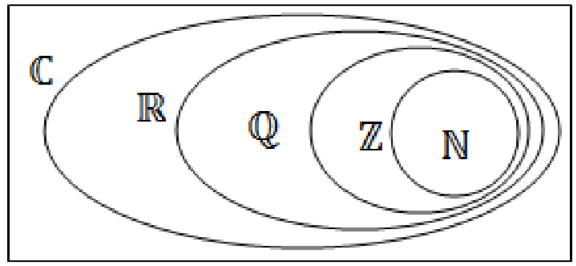
Množiny a logika

- **Množina**
  - Označujeme ju veľkými písmenami (A, B, C, ... Z)
  - Prázdna množina: $\emptyset$, {} (toto je zle: {$\emptyset$})
  - **Množina** môže byť **zadaná**:
    - Vymenovaním prvkov $A = \{1, 2, 3\}$
    - Obor pravdivosti nejakej výrokovej formy $B = \{x \in N_0; 2/x\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$
  - **Číselné množiny**
    - $\mathbb{N}$ **– množina prirodzených čísel,**
    - $\mathbb{Z}$ **– množina celých čísel,**
    - $\mathbb{Q}$ **– množina racionálnych čísel,**
    - $\mathbb{R}$ **– množina reálnych čísel,**
    - $\mathbb{C}$ **– množina komplexných čísel.**



  - **Počet prvkov množiny (Mohutnosť / Kardinalita)**
    - **Konečné** množiny
    - **Nekonečné** množiny
      - **Spočítateľné / Spočetné**
      - **Nespočítateľné / Nespočetné**

  - **Podmnožiny**
    - Hovoríme, že množina A je **podmnožinou** množiny B a píšeme **A ⊆ B**, ak **každý prvok množiny A je prvkom množiny B**. Ak chceme **zdôrazniť**, že **A ⊆ B a A ≠ B**, tak píšeme **A ⊂ B** a hovoríme, že A je **vlastná podmnožina** množiny B.
    - Pre každú množinu A platí**: ∅ ⊆ A, A ⊆ A.**
    - Hovoríme, že **množiny A, B sa rovnajú**, ak je splnené, že **A ⊆ B a zároveň aj B ⊆ A.**
    - **Dôrazové príklady:**
      - $A = \{1,2,3\}$
      - $B = \{1,2,3,4\}$
      - $C = \{\{1,2,3\}, 4\}$

$A \subseteq B$ $A \not\subseteq C$

$A \notin B$ $A \in C$

      - $A = \{1\}$
      - $B = \{1, \{1\}\}$

$A \in B$

$A \subseteq B$

- **Výrokový počet**
  - **Výrok** – vo výrokovom počte ho nedefinujeme, ale pod výrokom rozumieme každý **oznam, u ktorého má zmysel hovoriť, či je, alebo nie je pravdivý,** pričom **z týchto možnosti nastáva práve jedna.**
    - Vo výrokovom počte sa **nezaoberáme či je nejaký výrok pravdivý alebo nepravdivý.**

- **Logické spojky** výrokov (A):
  - **Negácia** –> $\neg A$; A'
  - **Konjunkcia** –> $A \wedge B$
  - **Disjunkcia** –> $A \vee B$
  - **Implikácia** –> $A \Rightarrow B$
  - **Ekvivalencia** –> $A \Leftrightarrow B$

$ph(p)$	$ph(q)$	$ph(\neg p)$	$ph(p \wedge q)$	$ph(p \vee q)$	$ph(p \Rightarrow q)$	$ph(p \iff q)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- **Výrokové formuly**
  - Každá výroková premenná je výroková formula.
  - Ak ϕ, ψ sú výrokové formuly, tak aj ¬(ϕ), (ϕ) ∧ (ψ), (ϕ) ∨ (ψ), (ϕ) ⇒ (ψ), (ϕ) ⟺ (ψ) sú výrokové formuly.

Tautológia – vždy pravdivá výroková formula

Kontradikcia – vždy nepravdivá výroková formula

- **Známe tautológie**
  - A ⟺ ¬(¬A),
  - (A ∧ B) ⇔ (B ∧ A),
  - (A ∨ B) ⟺ (B ∨ A),
  - (A ∧ B) ∧ C ⟺ A ∧ (B ∧ C),
  - (A ∨ B) ∨ C ⟺ A ∨ (B ∨ C),
  - A ∧ (B ∨ C) ⟺ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C),
  - A ∨ (B ∧ C) ⟺ (A ∨ B) ∧ (A ∨ C),
  - ¬(A ∧ B) ⟺ ¬A ∨ ¬B,
  - ¬(A ∨ B) ⟺ ¬A ∧ ¬B,
  - (A ⟺ B) ⟺ ((A ⇒ B) ∧ (B ⇒ A)),
  - ¬(A ⇒ B) ⟺ A ∧ ¬B,
  - A ⇒ B ⟺ ¬B ⇒ ¬A

- **Predikátový počet**
  - **Kartézsky súčin:**
    - $A = \{2, 3\}; B = \{1\}$
    - $A \times B = \{[2, 1], [3, 1]\}$
    - $A \times A = A^2 = \{[2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3]\}$
  - **Binárna relácia (podmnožina kartézskeho súčinu):**
    - $a = x; a < b; a > b; a \parallel b; a \perp b$
    - Ak R je relácia a dvojica [a, b] je jej prvkom, tak to zapisujeme [a, b] ∈ R, ale často aj takto aRb. Teda napríklad < je relácia
    - na množine prirodzených ˇčísel, v geometrii ste sa stretli s reláciou kolmosť’ ⊥, pripadne rovnobežnosť’ ∥

- **Operácie:**
  - $1 + 1; 4 * 5$
  - Je to napríklad sčítanie, odčítanie, atď'. Teda, ak hovoríme o binárnej operácii, tak k dvom operandom (napríklad k dvom číslam 3 a 5) je istým spôsobom jednoznačne priradený výsledok (napríklad 3 + 5 = 8). Tento spôsob určuje práve operácia (v našom prípade to bolo sčítanie).

- **Term**
  - Nech A je množina. Term nad A je definovaný takto:
    1. Každá premenná, ktorej oborom je množina A, je term nad A.
    2. Symbol každého prvku z A je term nad A.
    3. Ak f je n–árna operácia, o ktorej platí $D(f) \subseteq A^n$, $H(f) \subseteq A$ a ak $t_1, \cdots, t_n$ sú termy nad A, tak $f(t_1, \cdots, t_n)$ je term nad A.

  - **Dôrazové príklady:**
    - $\left((x + y) * z\right) * (x - z)$ je term nad R, lebo
      - x, y, z sú termy podľa 1.
      - Podľa 3. sú aj $x + y, x - z$ termy.
      - Podľa b) a 3. je $(x + y) * z$ term.
      - Podľa b), c) a 3. je potom aj $\left((x + y) * z\right) * (x - z)$ term
    - Ale napríklad x > 5 nie je term nad R, lebo < nie je ani premenná, ani symbol z množiny R, ani operácia.

- **Formula predikátového počtu:**
  - Nech A je množina. Ak t_1, t_2 sú termy, R je relácia definovaná na A, tak t_1Rt_2 je **atomická formula predikátového počtu** nad A.
  - **Každá atomická formula predikátového počtu** nad A **je formula predikátového počtu** nad A.
  - **Ak ϕ, ψ sú formuly predikátového počtu** nad A, **tak aj** ¬(ϕ), (ϕ) ∧ (ψ), (ϕ) ∨ (ψ), (ϕ) ⇒ (ψ), (ϕ) ⇔ (ψ), **sú formuly predikátového počtu** nad A.
  - Ak x je premenná a ϕ(x) je formula s premennou x, ktorá neobsahuje ∀x ani ∃x, tak ∀x, ϕ(x) aj ∃x, ϕ(x) sú formuly predikátového počtu.
- **Podformuly**
  - Nech Ψ, Φ sú formuly predikátového počtu. Hovoríme, že **Ψ je podformulou formuly Φ, ak formulu Ψ môžeme získať z formuly Φ vynechaním** niekoľkých **symbolov** na začiatku a na konci (niekoľko môže znamenať aj 0).
- **Dosah kvantifikátora:**
  - Ak **∀x : V , resp. ∃x : (V)** je podformula formuly Ψ, tak **V nazývame dosahom príslušného výskytu kvantifikátora** ∀x, resp. ∃x vo formule Ψ.
- **Výskyt premennej vo formule nazývame:**
  - **Viazaným**, ak nasleduje bezprostredne po znaku ∀ alebo ∃, alebo sa nachádza v dosahu kvantifikátora ∀x alebo ∃x.
  - **Voľným**, ak nie je viazaný.
- **Premennú vo formule nazývame:**
  - **Voľnou** vo formule V , ak má **aspoň jeden voľný výskyt** vo formule V.
  - **Viazanou** vo formule V , ak má **všetky výskyty** vo formule V **viazané**.

- **Formulu nazývame:**
    - **Uzavretou formulou**, ak **všetky** jej **premenné sú viazané**.
    - **Výrokovou formou**, ak **aspoň jedna** jej **premenná je voľná**