

# Základy počítačové grafiky

## Křivky v počítačové grafice

Michal Španěl

Ústav počítačové grafiky a multimédií  
Fakulta informačních technologií  
Vysoké učení technické v Brně

Brno 2016

# Proč potřebujeme umět popsat křivé tvary?

Rovnost přímek a kulatost kružnic je ideál, který se ve skutečnosti příliš nevyskytuje!



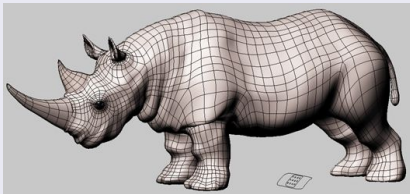
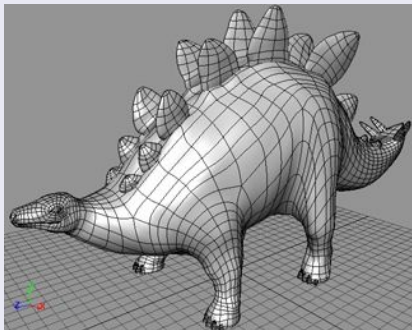
# Cíl přednášky

Seznámit se s jednotlivými typy křivek ve 2D, metodami jejich reprezentace a základními principy vykreslování.



# Použití křivek v počítačové grafice

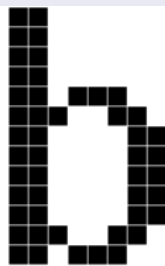
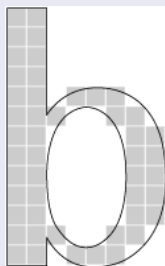
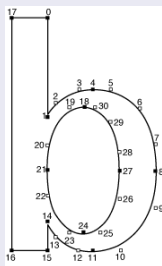
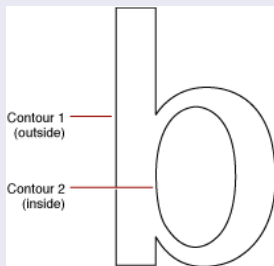
## Definice objektů (modelování)



[[www.3drender.com](http://www.3drender.com)]

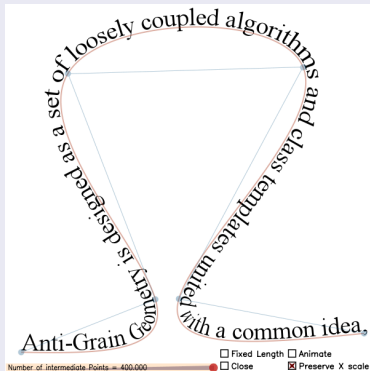
# Použití křivek v počítačové grafice, pokr.

## Definice fontů



# Použití křivek v počítačové grafice, pokr.

## Kreativní grafika

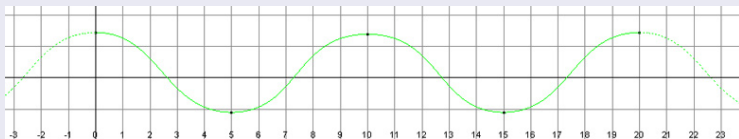
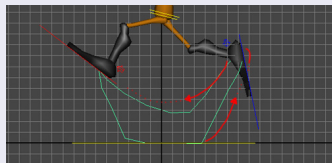
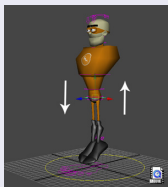


[[www.antigrain.com](http://www.antigrain.com)]

# Použití křivek v počítačové grafice, pokr.

## Určování dráhy objektů při animaci

- Run Cycle - *Rodri Torres* [<http://rodri.aniguild.com/>]



# Použití křivek v počítačové grafice, pokr.

## Run Cycle - *Rodri Torres*

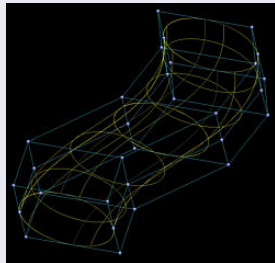
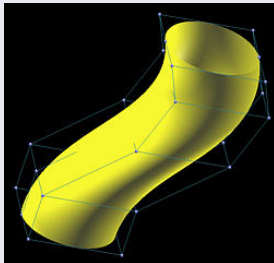
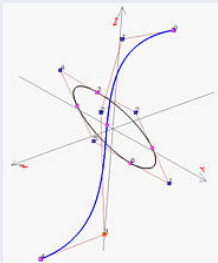


## Video ukázka



# Použití křivek v počítačové grafice, pokr.

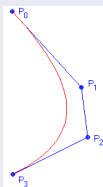
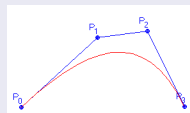
## Šablonování



# Požadované vlastnosti křivek

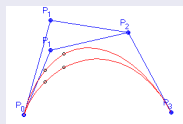
## Invariance k afiním transformacím a projekci

- Rotace řídicích bodů nemá vliv na tvar křivky.



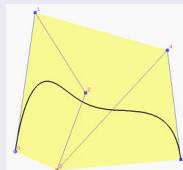
## Interpolace krajních bodů

- Křivka prochází krajními body.



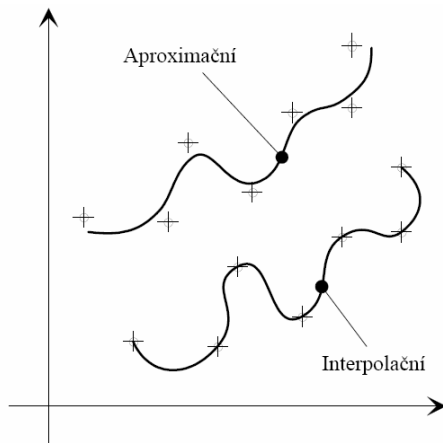
## Konvexní obálka

- Křivka leží v konvexní obálce svých řídicích bodů.



## Lokalita změn

# Základní druhy křivek



## Interpoláční křivka

- Křivka přímo prochází body ("*proložení*" bodů křivkou).

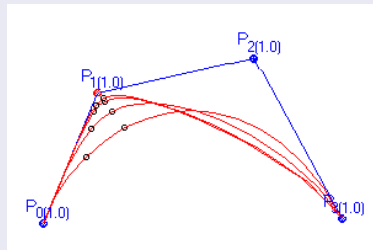
## Aproximační křivka

- Neprochází body.
- Tzv. řídící body).

# Základní druhy křivek, pokr.

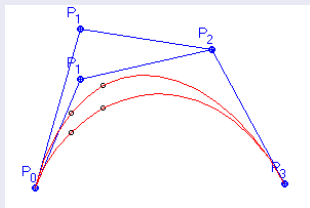
## Racionální křivka

- *Váhové koeficienty  $w_i$*  řídících bodů.
- Invariantní vůči perspektivní projekci.



## Neracionální křivka

- Tvar křivky ovlivňujeme pouze *změnou polohy řídících bodů*.
- Speciální případ racionální křivky, kdy  $w_i = 1$ .
- Nejsou invariantní vůči perspektivní projekci!



# Reprezentace křivek v počítačové grafice

Jak můžeme reprezentovat křivku?

# Parametrické vyjádření křivky

- Klasické matematické vyjádření,  $y = F(x)$ , není pro počítačovou grafiku vhodné!

## Parametrizovaná 2D křivka

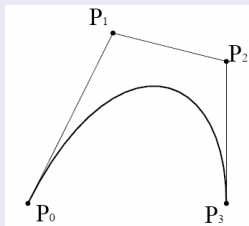
$$Q(t) = [x(t), y(t)]; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

## Polynomiální křivka

- *Kubické polynomy*

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$



# Maticový zápis

- Základní tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \end{aligned} \longrightarrow Q(t) = T \cdot C = [t^3 t^2 t 1] \cdot \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix}$$

- Konstantní matici  $C$  můžeme rozepsat do součinu  $C = MP$

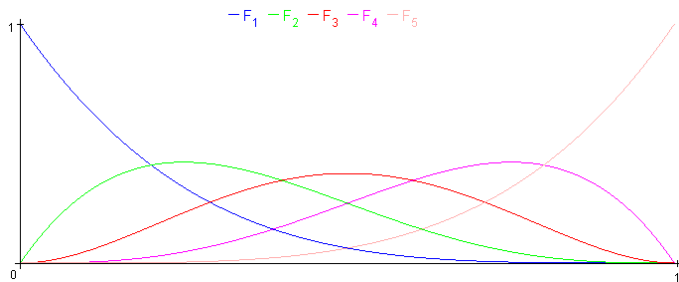
$$Q(t) = T \cdot MP = [t^3 t^2 t 1] \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

- $M$  ... *bázová matice* (dána použitou metodou).
- $P$  ... *geometrický vektor (řídící body, řídící vektory)*,  $P_i = [x_i, y_i]$ .

# Jiný zápis

$$Q(t) = P_0 \cdot F_0(t) + P_1 \cdot F_1(t) + P_2 \cdot F_2(t) + P_3 \cdot F_3(t)$$

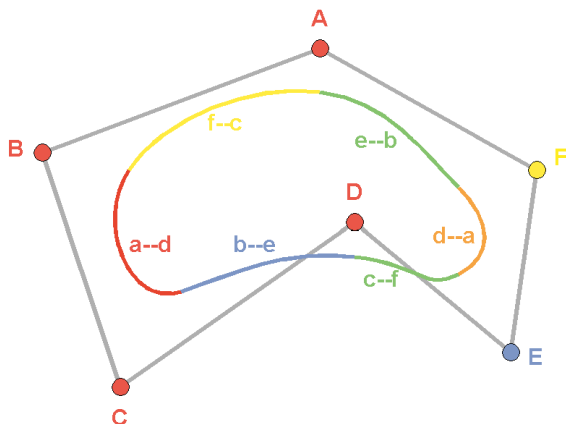
- $P$  ... řídicí body,  $P_i = [x_i, y_i]$ .
- $F_i$  ... polynomiální funkce („váhují příspěvky řídicích bodů“).





# Spline křivka

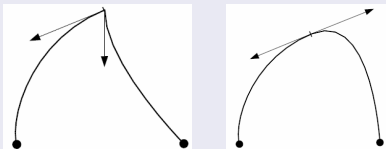
- *Křivky spojované ze segmentů po částech polynomiální křivky.*



# Spojitost křivek spojovaných ze segmentů

## Možnosti *parametrické* spojitosti $C^n$

- $C^0$  – totožnost navazujících koncových bodů.
- $C^1$  – totožnost tečných vektorů v navazujících bodech.
- $C^2$  – totožnost vektorů 2. derivace v navazujících bodech.

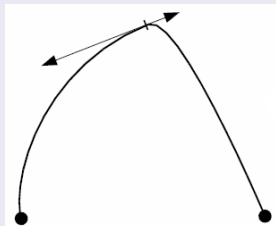


- Čím vyšší spojitost, tím déle se oba segmenty k sobě přimykají.

# Spojitost křivek, pokr.

## Oslabená podmínka spojitosti (též. *geometrická spojitost* $G^n$ )

- $G^0$  – totožnost navazujících koncových bodů.
- $G^1$  – tečné vektory v navazujících bodech jsou lineárně závislé.
- $G^2$  – shoda první křivosti v navazujících bodech.

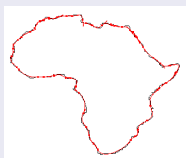
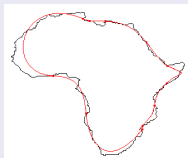


# Lepší definice spline křivky

- *Spline* – pružné křivítko, kovový pásek proložený body.
- Po částech polynomiální křivka.
- Spline křivka *stupně*  $n$  má *spojitost*  $C^{n-1}$ .

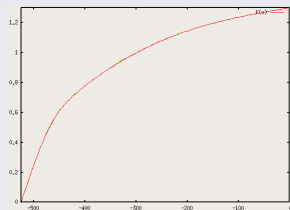
## Cíl použití spline křivek

- Minimalizovat křivost křivky (délku, energii).
- Efektivní řízení tvaru křivky (modelování).

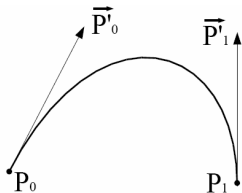


## Přirozený spline

- Spline, který interpoluje své řídicí body.



# Fergusonova kubika



- Nejčastější interpolační křivka.
- Určena *dvěma koncovými body*  $P_0, P_1$  (poloha) a *dvěma tečnými vektory*  $\vec{P}'_0, \vec{P}'_1$  (vyklenutí).

## Maticový zápis

$$Q(t) = T.M.P = [t^3 t^2 t 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vec{P}'_0 \\ \vec{P}'_1 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = P_0 \cdot F_1(t) + P_1 \cdot F_2(t) + \vec{P}'_0 \cdot F_3(t) + \vec{P}'_1 \cdot F_4(t)$$

# Fergusonova kubika, pokr.

## Hermitovy polynomy

$$F_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$F_2(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$F_3(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$F_4(t) = t^3 - t^2$$

+/-

- Neinteraktivní a neintuitivní řízení tvaru.
- Nelokální změna tvaru posunem jednoho bodu.

- *Navazování segmentů* – totožnost koncových bodů ( $C_0$ ) a shodnost tečných vektorů ( $C_1$ ).
- Mezi dvěma body jeden segment.
- *Přirozený spline* – maticové řešení celé křivky pro nulové koncové tečné vektory.

# Kochanek-Bartels spline

- Interpolační spline křivka.
- Pro interpolaci využívá Fergusonových kubik.
- Určeno množinou  $N$  interpolovaných bodů  $P_i$  a odpovídajícími koeficienty  $a_i$ ,  $b_i$  a  $c_i$ .
- Koeficienty určují chování křivky v daném bodě.

## Výpočet tečných vektorů

$$\vec{P}_i' = \frac{(1 - a_i)(1 + b_i)(1 + c_i)}{2}(P_i - P_{i-1}) + \frac{(1 - a_i)(1 - b_i)(1 - c_i)}{2}(P_{i+1} - P_i)$$
$$\vec{P}_{i+1}' = \frac{(1 - a_{i+1})(1 + b_{i+1})(1 - c_{i+1})}{2}(P_i - P_{i-1}) + \frac{(1 - a_{i+1})(1 - b_{i+1})(1 + c_{i+1})}{2}(P_{i+1} - P_i)$$

# Kochanek-Bartels spline, pokr.

## Význam koeficientů

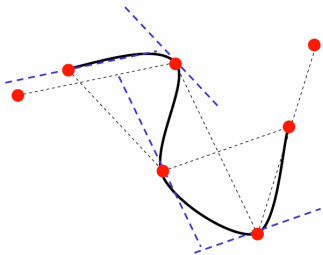
- $a_i$  ... tenze (jak ostře přiléhá křivka v bodě  $P_i$ ).
- $b_i$  ... šikmost křivky.
- $c_i$  ... spojitost křivky.

## Použití v animaci

- Definice dráhy pohybu objektů.
- Konstantní rychlost bodu.



# Catmull-Rom spline



- Interpolační spline křivka určena množinou  $N$  bodů  $P_0, \dots, P_{N-1}$ .
- Tečný vektor v  $P_i$  je rovnoběžný s vektorem  $P_{i-1} - P_{i+1}$ .
- *Kochanek-Bartels s nulovými koeficienty.*

## Maticový zápis

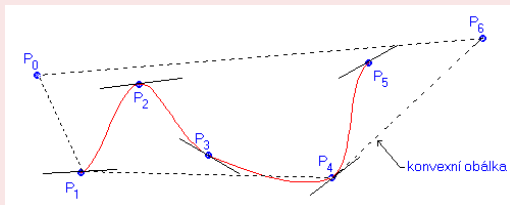
$$Q(t) = \frac{1}{2} [t^3 t^2 t 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

# Catmull-Rom spline, pokr.

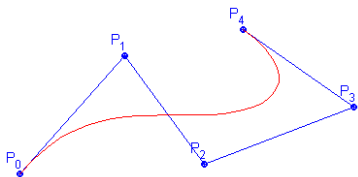
- Křivka vychází z bodu  $P_1$  a končí v bodu  $P_{N-2}$ .
- Interpolaci koncových bodů zajistí jejich opakování.

+/-

- Výsledný spline obecně neleží v konvexní obálce svých řídicích bodů.



# Beziérový křivky



- Aproximační křivky (2D grafika, fonty, šablonování) 1960.
- Polynomiální křivka s použitím **Bernsteinových polynomů  $B_i^n$** .
- Křivka stupně  $n$  určena  $n + 1$  body.
- Prochází koncovými body.

## Definice křivky

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot B_i^n(t); \quad i = 0, 1, \dots, n$$

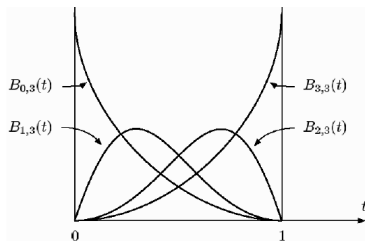
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

## Tečné vektory v koncových bodech

$$P' \vec{v}(0) = 3(P_1 - P_0)$$

$$P' \vec{v}(1) = 3(P_3 - P_2)$$

# Beziérový křivky, pokr.



## Rekurentní definice Bernsteinových polynomů

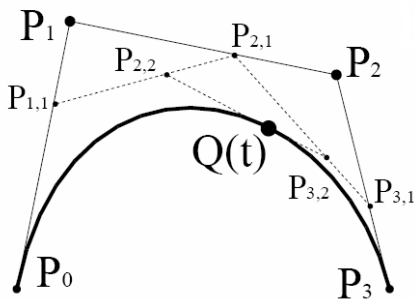
$$B_i^n(t) = (1-t) \cdot B_i^{n-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t)$$

- Využívá ji algoritmus *de Casteljau* pro vykreslení křivky (viz. dále).

## Další vlastnosti polynomů

- Mají nezápornou hodnotu.
- Mají jednotkový součet – křivka leží v konvexní obálce.
- *Rekurentní definice.*

# Algoritmus de Casteljaeu



$$P_{i,j}(t) = (1-t) \cdot P_{j-1,i-1} + t \cdot P_{j,i-1}$$

$$P_{0,0} \downarrow$$

$$P_{0,1} \rightarrow P_{1,1} \downarrow$$

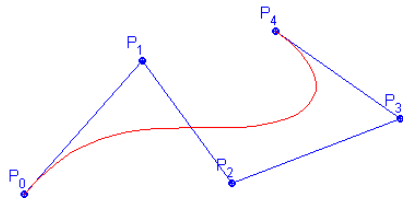
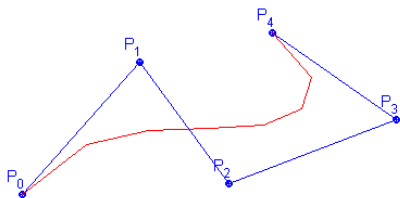
$$P_{0,2} \rightarrow P_{2,1} \rightarrow P_{2,2} \downarrow$$

$$P_{0,3} \rightarrow P_{3,1} \rightarrow P_{3,2} \rightarrow P_{3,3}$$

- Rekurzivní algoritmus vykreslování Beziérových křivek.
- Plyne z rekurentní definice pro Bernsteinovy polynomy.
- Úseky řídicího polynomu jsou děleny v poměru hodnot  $t$  a  $1 - t$ .

# Vykreslení křivky algoritmem de Casteljau

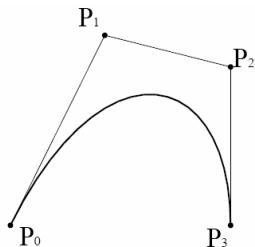
- Opakovaný výpočet pro různé hodnoty  $t$  se zvoleným krokem.
- Spojování vypočtených bodů úsečkami.



+/-

- Jakou optimální velikost kroku zvolit?
- Rovnoměrně rozprostřené body (stejný počet na rovné i křivé části křivky)!

# Beziérový kubiky



- Segment popsán čtyřmi řídicími body  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  a  $P_3$ .
- Nelokální změna tvaru posunem jednoho bodu.
- Invariantní k lineárním transformacím.

## Maticový zápis

$$Q(t) = T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

## Zápis pomocí Bernsteinových polynomů stupně 3

$$P(t) = P_0 B_0(t) + P_1 B_1(t) + P_2 B_2(t) + P_3 B_3(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t)$$

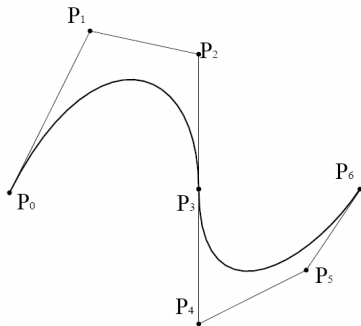
$$B_0(t) = (1-t)^3$$

$$B_1(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_2(t) = 3t^2(1-t) \bullet$$

$$B_3(t) = t^3 \bullet$$

# Navazování segmentů Beziérových kubik



## Tečné vektory v koncových bodech

$$P'(\vec{0}) = 3(P_1 - P_0)$$

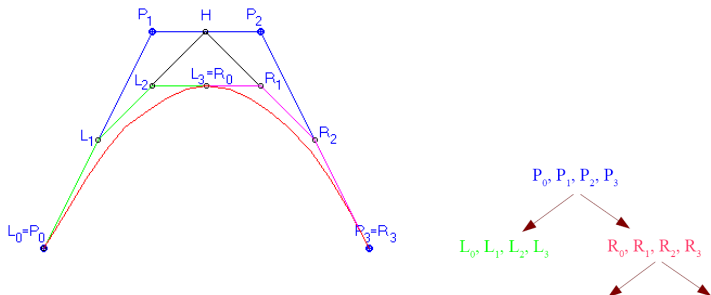
$$P'(\vec{1}) = 3(P_3 - P_2)$$

## Podmínky spojitosti $C^1$

- Totožnost koncových bodů.
- Shodné tečné vektory – koncový bod úseku  $Q_i$  je středem úsečky předposledního bodu  $Q_i$  a druhého bodu  $Q_{i+1}$ .

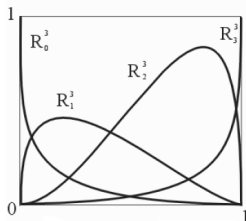


# Algoritmus de Casteljaeu a Beziérový kubiky

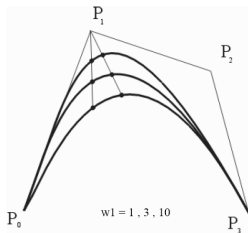


- "Divide and Conquer"– *rekurzivní dělení na dvě podkřivky*, volíme  $t = 0.5$ .
- Dostatečně rovná křivka není dále dělena, ale rovnou vykreslena.
- Minimální vzdálenost bodů na úrovni uhlopříčky pixelu.

# Racionální Beziérový křivky



- Místo neracionálních Bernsteinových polynomů  $B_i^n$  jsou použity *racionální polynomy*  $R_i^n$ .
- $w_i$  – váhový koeficient  $i$ -tého řídícího bodu.
- Pro  $w_i = 1$  jsou racionální polynomy  $R_i^n$  rovny neracionálním  $B_i^n$ .



## Definice křivky

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot R_i^n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot P_i \cdot B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_i^n(t)}$$

$$R_i^n(t) = \frac{w_i \cdot B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_i^n(t)}$$

# Racionální Beziérovky křivky, pokr.

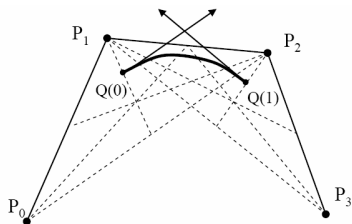
## Vlastnosti polynomů

- Mají nezápornou hodnotu.
- Mají jednotkový součet – křivka leží v konvexní obálce.
- *Nemají rekurentní definici!*

+/-

- Pro vykreslení nelze použít algoritmus *de Casteljau!*

# Coonsovy křivky (kubiky)



- Aproximační křivka (význam hlavně pro teorii spline křivek).
- Polynomiální křivka stupně  $n$ , určena  $n + 1$  řídicími body.
- Neprochází koncovými řídicími body.

## Maticový zápis

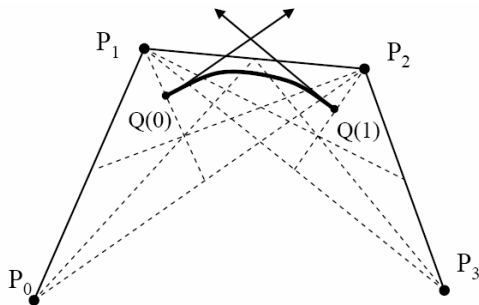
$$Q(t) = \frac{1}{6} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

## Tečné vektory

$$q'(\vec{0}) = \frac{P_2 - P_0}{2}$$

$$q'(\vec{1}) = \frac{P_1 - P_3}{2}$$

# Coonsovy křivky (kubiky), pokr.



## Koncové body

$$Q(0) = \frac{P_0 + 4 \cdot P_1 + P_2}{6}$$

$$Q(1) = \frac{P_1 + 4 \cdot P_2 + P_3}{6}$$

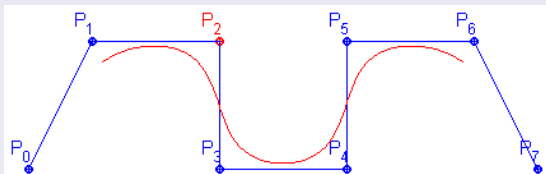
## Násobnost řídicích bodů

- Jednonásobný  $\rightarrow$  běžný bod  $P_n$ .
- Dvojnásobný  $\rightarrow P_0 = P_1 \rightarrow Q(0)$  leží v  $1/6$  úsečky  $P_0P_1$ .
- Trojnásobný  $\rightarrow P_0 = P_1 = P_2 \rightarrow Q(0)$  leží v  $P_0$ .

# Coonsovy křivky (kubiky), pokr.

## Navazování segmentů $C^2$

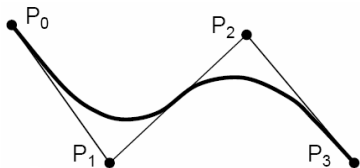
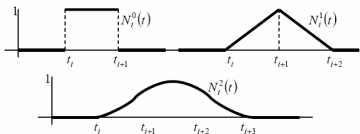
- Zopakováním posledních tří řídicích bodů sousedního segmentu.



+/-

- S křivkou pracujeme po segmentech.
- Nelze přidat jeden bod, jedině celý segment.

# B-spline křivky

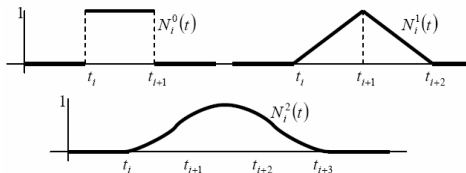


- Zobecnění Coonsových křivek.
- Křivka určena  $n + 1$  body.
- Křivka stupně  $k \rightarrow$  spojitost  $k + 1$ .
- Nejde o obyčejné navázání segmentů (nemusí platit  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ ).
- Uzlový vektor  $U_t$  – hodnoty parametru  $t$  v uzlech.

## Definice křivky

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot N_i^k(t); \quad t \in \langle 0, t_m \rangle$$

# Rekurentní definice polynomu B-spline křivky



$$N_i^k(t) = \frac{(t - t_i)}{(t_{i+k} - t_i)} N_i^{k-1}(t) + \frac{(t_{i+k+1} - t)}{(t_{i+k+1} - t_{i+1})} N_{i+1}^{k-1}(t)$$

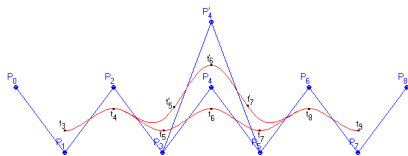
$$N_i^0(t) = 1, \text{ pro } t \in \ll t_i, t_{i+1} \gg$$

$$N_i^0(t) = 0, \text{ jinak}$$

- Polynomy mají nezápornou hodnotu.
- Jednotkový součet – křivka leží v konvexní obálce.
- Při dělení 0 je výsledek = 0.
- Vykreslování algoritmem *de Boor* (ala de Casteljaou).



# Uzlový vektor $U_t$



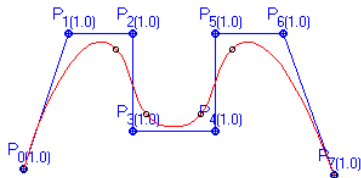
- Představuje hodnoty parametru  $t$  v uzlech.
- Délka  $m + 1$ , kde  $m = n + k + 1$ .
- Uniformní  $\rightarrow t_{i+1} - t_i = \text{konst.}$
- Násobné uzly (zdegenerování segmentu do jediného bodu).
- Lokální změna tvaru křivky.

## Příklad uzlového vektoru ( $k = 2$ )

$$U_t = (0, 0, 0, t_{k+1}, \dots, t_{m-k-1}, 1, 1, 1)$$

# NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) křivky

- Zobecnění B-spline křivek.
- Racionální křivka  $\rightarrow$  váhové koeficienty  $w_i$   $i$ -tého řídicího bodu.
- Neuniformní uzlový vektor  $\rightarrow t_{i+1} - t_i \neq konst.$
- Umožňuje vkládání řídicího bodu při zachování tvaru!
- Přesné vyjádření kuželoseček apod.
- Invariantní vůči lineárním transformacím.



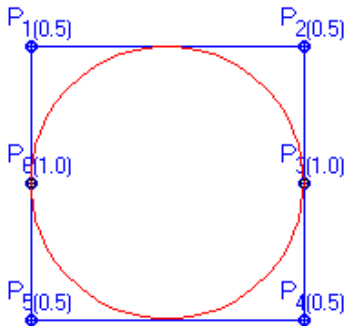
## Definice křivky

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot R_i^k(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot P_i \cdot N_i^k(t)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot N_i^k(t)}$$

$$R_i^k(t) = \frac{w_i \cdot N_i^k(t)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot N_i^k(t)}$$

# Příklady NURBS křivek

## Definice kružnice



$$U_t = (0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 1, 1, 1)$$