IEL - práce s komplexními čísly

Václav Šátek

Brno University of Technology, Faculty of Information Technology
Božetěchova 1/2. 612 66 Brno - Královo Pole
satek@fit.vutbr.cz

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

13. listopadu 2024

- tvoří nástavbu reálných čísel, umožňují odmocňovat záporná čísla
- řešení kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$
  - v oboru reálných číslech nemá řešení
    $D = b^2 - 4ac = -4$ ... záporný diskriminant
    $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ ... $\sqrt{-4} = ?$
  - v komplexních ano :)
- **reprezentace** komplexního čísla: **uspořádaná dvojice** $[x, y]$
  - x ... reálná část
  - y ... imaginární část

Komplexní čísla

- tvoří nástavbu reálných čísel, umožňují odmocňovat záporná čísla
- řešení kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$
  - v oboru reálných číslech **nemá** řešení
    $D = b^2 - 4ac = -4 \ \ldots$ záporný diskriminant
    $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \ldots \sqrt{-4} = ?$
  - v komplexních **ano** :)
- **reprezentace** komplexního čísla: **uspořádaná dvojice** $[x, y]$
  - $x \ldots$ reálná část
  - $y \ldots$ imaginární část

- tvoří nástavbu reálných čísel, umožňují odmocňovat záporná čísla
- řešení kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$
  - v oboru reálných číslech **nemá** řešení
    $D = b^2 - 4ac = -4 \; \ldots$ záporný diskriminant
    $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \ldots \sqrt{-4} = ?$
  - v komplexních **ano** :)
- **reprezentace** komplexního čísla: **uspořádaná dvojice** $[x, y]$
  - $x \ldots$ reálná část
  - $y \ldots$ imaginární část

- tvoří nástavbu reálných čísel, umožňují odmocňovat záporná čísla
- řešení kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$
  - v oboru reálných číslech **nemá** řešení
    $D = b^2 - 4ac = -4 \ \ldots$ záporný diskriminant
    $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \ldots \sqrt{-4} = ?$
  - v komplexních **ano** :)
- **reprezentace** komplexního čísla: **uspořádaná dvojice** $[x, y]$
  - $x \ldots$ reálná část
  - $y \ldots$ imaginární část

- tvoří nástavbu reálných čísel, umožňují odmocňovat záporná čísla
- řešení kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$
  - v oboru reálných číslech **nemá** řešení
    $D = b^2 - 4ac = -4$ ... záporný diskriminant
    $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \ldots \sqrt{-4} = ?$
  - v komplexních **ano** :)
- **reprezentace** komplexního čísla: **uspořádaná dvojice** $[x, y]$
  - $x \ldots$ reálná část
  - $y \ldots$ imaginární část

Komplexní čísla

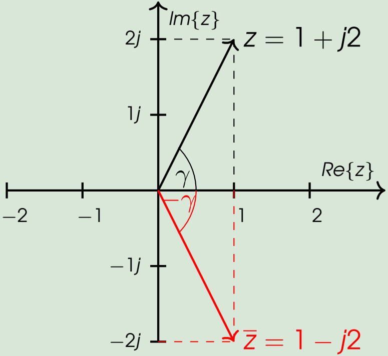
- zápis v **algebraickém tvaru**: $z = x + jy \in \mathbb{C}$
  - $j \ldots$ imaginární jednotka (matematici značí 'i', elektrotrikáři 'j')
- komplexně sdružené číslo k z: $\overline{z} = x$**-**jy
- platí:
  - $\mathbf{j^2 = -1}$
  - $j^3 = j^2 \cdot j = -j$
  - $j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1$
  - $\vdots$
- pokud:
  - $y = 0 \ldots$ reálné číslo
  - $x = 0 \ldots$ ryze imaginární číslo

- jaké je tedy řešení rovnice $x^2 + 1 = 0$ v $\mathbb{C}$?
  $\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{j^2 4} = j2$
  $x_{1,2} = \frac{\pm j2}{2} = \pm j$
- kořeny kvadratické rovnice se záporným diskriminantem jsou **komplexně sdružené**

- komplexní čísla reprezentujeme graficky v **Gaussově** (komplexní) **rovině**:
  - kartézský pravoúhlý souřadný systém
  - osa x – reálná část (Re) komplexního čísla
  - osa y – imaginární část (Im) komplexního čísla

Grafická reprezentace komplexních čísel $z = 1 + j2$, $\bar{z} = 1 - j2$

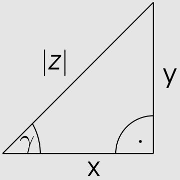
Komplexní číslo $z = 1 + j2$ a komplexně sdružené $\bar{z} = 1 - j2$



- komplexní číslo je reprezentováno jako **orientovaný vektor** $\vec{0z}$
- využívá se v **goniometrickém tvaru**: $z = |z|\,(\cos\gamma + j\sin\gamma)$
  - $|z| \ldots$ absolutní hodnota (velikost vektoru $\vec{0z}$)
  - $\gamma \ldots$ orientovaný úhel (argument)

Goniometrické funkce

- zavzpomínáme na pravoúhlý trojúhelník



- $\sin\gamma = \frac{y}{|z|}$
- $\cos\gamma = \frac{x}{|z|}$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- $\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{y}{x}$
  $\gamma = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{z}\right)$
- $D(\mathrm{tg}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Pro určení správné velikosti hodnoty výsledku goniometrické funkce je potřeba vědět, ve kterém **kvadrantu** se **orientovaný úhel** nachází.

$Im\{z\}$

II. kvadrant
$x < 0;\ y > 0$
$\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$
$(\frac{\pi}{2}; \pi)$

I. kvadrant
$x > 0;\ y > 0$
$\gamma \in (0^\circ; 90^\circ)$
$(0; \frac{\pi}{2})$

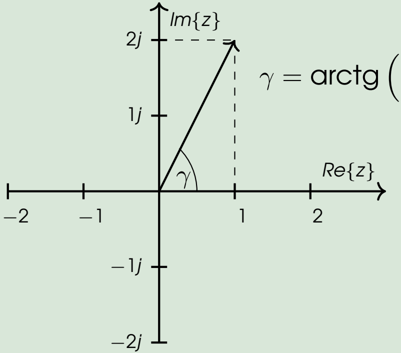
$Re\{z\}$

III. kvadrant
$x < 0;\ y < 0$
$\gamma \in (180^\circ; 270^\circ)$
$(\pi; \frac{3\pi}{2})$

IV. kvadrant
$x > 0;\ y < 0$
$\gamma \in (270^\circ; 360^\circ)$
$(\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

Výpočet velikosti úhlu γ

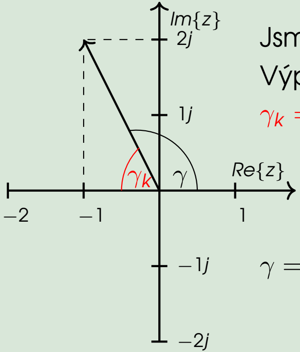
Jaký je argument γ pro $z = 1 + j2$?



$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1}\right) = \operatorname{arctg}(2) \doteq 1.10715\,\mathrm{rad}$$
$$\doteq \frac{180}{\pi} 1.10715 \doteq 63,44^\circ$$

Jsme v **I. kvadrantu** ($x = 1 > 0$, $y = 2 > 0$), výsledek je správně.

Grafická reprezentace komplexního čísla $z_2 = -1 + j2$



Jsme ve **II. kvadrantu**, mimo def. obor tg

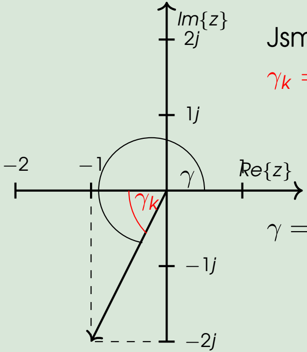
Výpočet ‘kalkulačka’:

$$\gamma_k = \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{-1}\right) = \mathrm{arctg}\,(-2) \doteq -1.1071\,\mathrm{rad}$$
$$\doteq -\frac{180}{\pi}1.1071 \doteq -63,43^\circ$$

Nutno připočíst π (nebo 180°):

$$\gamma = \pi + \gamma_k = 3,1416 - 1,1071 = 2,0345\,\mathrm{rad}$$
$$\doteq \frac{180}{\pi}2,0345 \doteq 116,57^\circ$$

Grafická reprezentace komplexního čísla $z_2 = -1 - j2$



Jsme ve **III. kvadrantu**, mimo def. obor tg

$\gamma_k = \text{arctg}\left(\frac{-2}{-1}\right) = \text{arctg}\,(2) \doteq 1,1071\,\text{rad}$

$\doteq \frac{180}{\pi} 1,1071 \doteq 63,43^\circ$

$\gamma = \pi + \gamma_k = 3,1416 + 1,1071 = 4,2487\,\text{rad}$

$\doteq \frac{180}{\pi} 4,2487 \doteq 243,43^\circ$

Je opravdu **algebraický tvar** $z = x + jy$ ekvivalentní se zápisem v **goniometrickém tvaru** $z = |z|(\cos\gamma + j\sin\gamma)$?

Kontrola pro $z = 1 + j2$

- $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
- $\cos\gamma = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$
- $\sin\gamma = \frac{y}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Po dosazení

$$1 + j2 = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + j\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 1 + j2$$

Pozn. **Při násobení reálným číslem násobíme reálnou a imaginární část komplexního čísla zvlášť!**

OPERACE S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

Součet: $z_1 + z_2$

$$(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Rozdíl: $z_1 - z_2$

$$(x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Součin: $z_1 \cdot z_2$

$$\begin{aligned}(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) &= (x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jy_1 x_2 + j^2 y_1 y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)\end{aligned}$$

Součet: $z_1 + z_2$

$$(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Rozdíl: $z_1 - z_2$

$$(x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Součin: $z_1 \cdot z_2$

$$\begin{aligned}(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) &= (x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)\end{aligned}$$

Operace s komplexními čísly

Součet: $z_1 + z_2$

$$(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Rozdíl: $z_1 - z_2$

$$(x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Součin: $z_1 \cdot z_2$

$$\begin{aligned}(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) &= (x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)\end{aligned}$$

Podíl: $\frac{z_1}{z_2}$

Využijeme **komlexně sdružené číslo** ke jmenovateli a roznásobíme jím čitatel i jmenovatel (ve jmenovateli dostaneme reálné číslo).

$$\frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)\cdot(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)\cdot(x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x^2 + y^2} + j\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x^2 + y^2}$$

Příklad: $z_1 = 2 + j3$, $z_2 = 2 - j3$

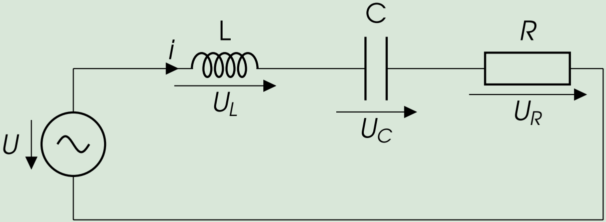
$$\frac{2 + j3}{2 - j3} = \frac{4 - 9}{4 + 9} + j\frac{6 - 2\cdot(-3)}{4 + 9} = -\frac{5}{13} + j\frac{12}{13}$$

PŘÍKLAD: RLC OBVODY

RLC obvody

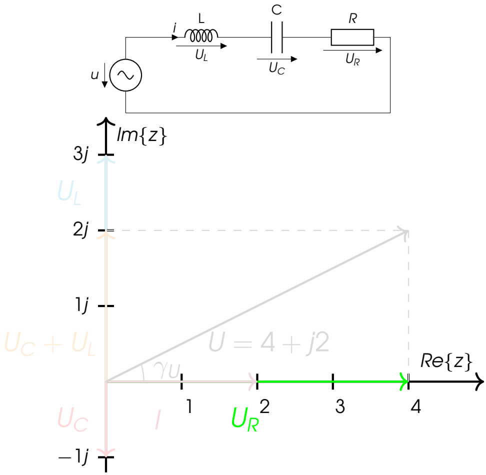
- Určete celkové napětí U v sériovém RLC obvodu.

$U_R = 4\,\text{V},\ U_C = -j1\,\text{V},\ U_L = j3\,\text{V},\ I = 2\,\text{A}$

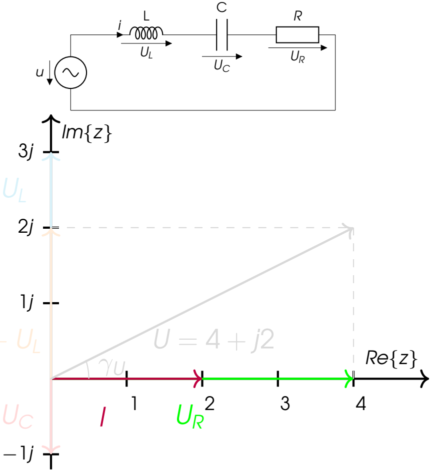


Z II. Kirchoffova zákona:

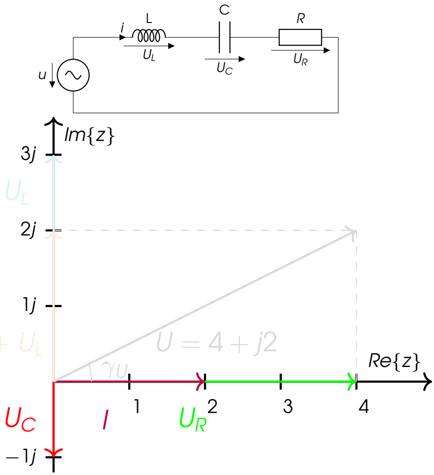
$$U_R + U_C + U_L - U = 0$$
$$U = U_R + U_C + U_L$$
$$U = 4 + j2$$



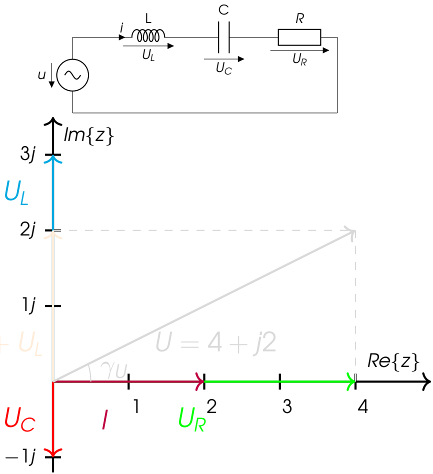
Ve fázorovém diagramu vidíme, že argument γ_U výsledného napětí U závisí na velikosti napětí na kondenzátoru U_C a napětí na cívce U_L (resp. na jejich součtu). U obvodů, kde $|U_C| = |U_L|$ tedy $\gamma_U = 0$ (resp. $U_C + U_L = 0$), nastává **rezonance**.



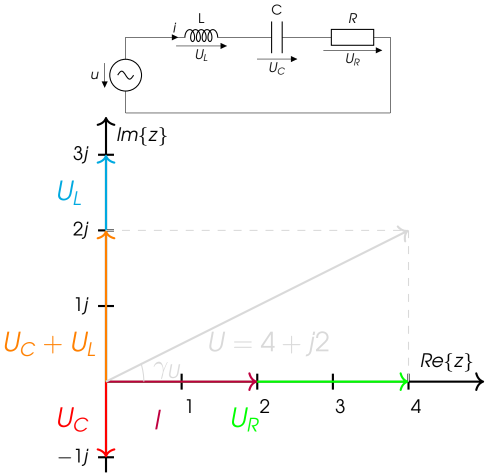
Ve fázorovém diagramu vidíme, že argument γ_U výsledného napětí U závisí na velikosti napětí na kondenzátoru U_C a napětí na cívce U_L (resp. na jejich součtu). U obvodů, kde $|U_C| = |U_L|$ tedy $\gamma_U = 0$ (resp. $U_C + U_L = 0$), nastává **rezonance**.



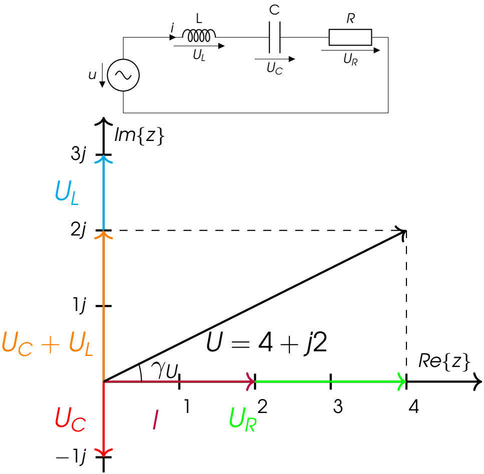
Ve fázorovém diagramu vidíme, že argument γ_U výsledného napětí U závisí na velikosti napětí na kondenzátoru U_C a napětí na cívce U_L (resp. na jejich součtu). U obvodů, kde $|U_C| = |U_L|$ tedy $\gamma_U = 0$ (resp. $U_C + U_L = 0$), nastává **rezonance**.



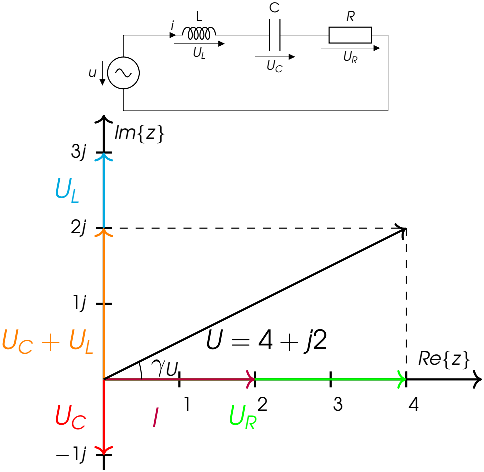
Ve fázorovém diagramu vidíme, že argument γ_U výsledného napětí U závisí na velikosti napětí na kondenzátoru U_C a napětí na cívce U_L (resp. na jejich součtu). U obvodů, kde $|U_C| = |U_L|$ tedy $\gamma_U = 0$ (resp. $U_C + U_L = 0$), nastává **rezonance**.



Ve fázorovém diagramu vidíme, že argument γ_U výsledného napětí U závisí na velikosti napětí na kondenzátoru U_C a napětí na cívce U_L (resp. na jejich součtu). U obvodů, kde $|U_C| = |U_L|$ tedy $\gamma_U = 0$ (resp. $U_C + U_L = 0$), nastává **rezonance**.



Ve fázorovém diagramu vidíme, že argument γ_U výsledného napětí U závisí na velikosti napětí na kondenzátoru U_C a napětí na cívce U_L (resp. na jejich součtu). U obvodů, kde $|U_C| = |U_L|$ tedy $\gamma_U = 0$ (resp. $U_C + U_L = 0$), nastává **rezonance**.



Ve fázorovém diagramu vidíme, že argument γ_U výsledného napětí U závisí na velikosti napětí na kondenzátoru U_C a napětí na cívce U_L (resp. na jejich součtu). U obvodů, kde $|U_C| = |U_L|$ tedy $\gamma_U = 0$ (resp. $U_C + U_L = 0$), nastává **rezonance**.

Děkuji za pozornost!