Súčin matíc

Definícia. Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Tvrdenie.

- Neutrálny prvok vzhľadom na násobenie štvorcových matíc je jednotková matica
- K niektorým štvorcovým maticiam existujú inverzné matice, teda:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzná matica, príklad

Nájdite inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Inverzná matica, príklad

Nájdite inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme má platiť:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Inverzná matica, príklad

Nájdite inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme má platiť:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resp. po vynásobení:

$$\begin{pmatrix} a.x_1 + b.y_1 & a.x_2 + b.y_2 \\ c.x_1 + d.y_1 & c.x_2 + d.y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzná matica, príklad-pokračovanie

Teda potrebujeme vyriešiť sústavy rovníc:

$$\begin{array}{rcrcl} a.x_1 & + & b.y_1 & = & 1 \\ c.x_1 & + & d.y_1 & = & 0 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{rcrcl} a.x_2 & + & b.y_2 & = & 0 \\ c.x_2 & + & d.y_2 & = & 1 \end{array}$$

Inverzná matica, príklad-pokračovanie

Teda potrebujeme vyriešiť sústavy rovníc:

$$\begin{array}{rcrcl} a.x_1 & + & b.y_1 & = & 1 \\ c.x_1 & + & d.y_1 & = & 0 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{rcrcl} a.x_2 & + & b.y_2 & = & 0 \\ c.x_2 & + & d.y_2 & = & 1 \end{array}$$

Použitím Cramerovho pravidla dostaneme:

- pre x_1 :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{d}{|A|}$$

- pre y_1 :

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-c}{|A|}$$

Inverzná matica, príklad

- pre x_2 :

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-b}{|A|}$$

- pre y_2 :

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a}{|A|}$$

Inverzná matica, príklad

Potom inverzná matica je:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Zrejme platí aj:

$$A^{-1}.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pozor, toto všetko sa dá jedine vtedy, ak $|A| \neq 0$!

Inverzná matica, príklad

Nájdite inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inverzná matica, príklad

Nájdite inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme má platiť:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha by sa dala riešiť tak, že zostavíme sústavu deviatich rovníc s deviatimi neznámymi, pri zostavení rovníc vychádzame z definície súčinu matíc. My však inverznú maticu budeme hľadať inak.

Inverzná matica, príklad - pokračovanie

- Zatiaľ budeme postupovať bez zdôvodnenia-naučíme sa iba postup, zdôvodnenie bude až pri lineárnych transformáciách. Zapíšeme si maticu a hneď vedľa nej jednotkovú rovnakého typu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Teraz ich budeme upravovať pomocou GEM tak, aby ľavá časť bola jednotková. Keď sa nám to podarí, tak pravá časť bude inverzná.
Pozor, vo všeobecnosti sa nám to nemusí podariť, lebo nie každá matica má aj inverznú maticu.
Kedy sa nám to podarí?

Inverzná matica, príklad-pokračovanie

- Upravujeme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

- Teda

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

je hľadaná inverzná matica. Overte si to! Ako?

Determinanty a inverzné matice

Ako nájsť inverznú maticu pomocou determinantu?

- inšpirujeme sa v úplne prvom príklade tejto prednášky.
- Určíme postupne algebraické doplnky $\mathcal{A}_{ij}$ k prvkom a_{ij}.
- Vytvoríme **adjungovanú maticu** $A^* = \mathcal{A}_{ij}^T$.
- ak $|A| \neq 0$, tak $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

Determinanty a inverzné matice, príklad

Vypočítajte $|A|$, *nájdite* A^*, A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinanty a inverzné matice, príklad

Vypočítajte $|A|$, *nájdite* A^*, A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Použitím Sarrusovho pravidla vypočítame determinant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Po diagonálach dostaneme
$|A| = 1.1.0 + 1.1.3 + 2.0.(-2) - 3.1.2 - (-2).1.1. - 0.0.1 = -1$

Determinanty a inverzné matice, príklad-pokračovanie

- Postupne si vypočítame algebraické doplnky $\mathcal{A}_{ij}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

kde M_{ij} je determinant matice, ktorá vznikne z matice A vynechaním $i-$teho riadku a $j-$teho stĺpca. Potom prvý stĺpec adjungovanej matice A^* bude:

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\mathcal{A}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Determinanty a inverzné matice, príklad-pokračovanie

- Druhý stĺpec bude:

$$\mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$\mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\mathcal{A}_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Determinanty a inverzné matice, príklad-pokračovanie

- A posledný stĺpec bude:

$$\mathcal{A}_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\mathcal{A}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$\mathcal{A}_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Determinanty a inverzné matice, príklad-pokračovanie

- Potom

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -4 & -6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- A keďže $|A| = -1$, potom $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Príklad

Dané sú matice $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Určte maticu X *tak, aby platilo:*

$$C \cdot X = D.$$

Riešenie. Využijeme vedomosti o inverznej matici, asociativite násobenia a neutralite jednotkovej matice, teda:

$$C \cdot X = D \iff C^{-1} \cdot (C \cdot X) = C^{-1} \cdot D \iff$$

$$\iff (C^{-1} \cdot C) \cdot X = C^{-1} \cdot B \iff X = C^{-1} \cdot D.$$

Pozor, násobenie matíc nie je komutatívne!