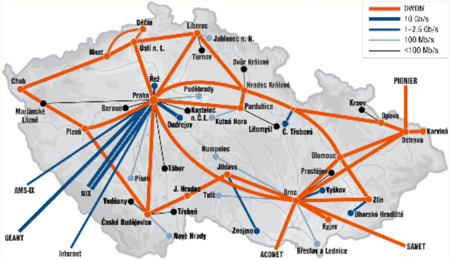
6 Orientované grafy, Toky v sítích

Nyní se budeme zabývat typem síťových úloh, ve kterých není podstatná délka hran a spojení, nýbž jejich propustnost (jako potrubní nebo počítačové sítě).

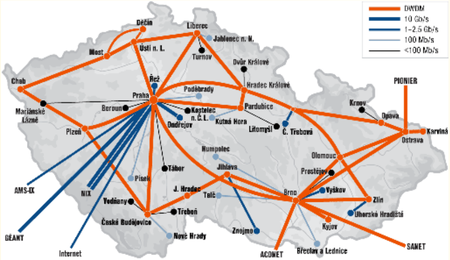
Základní úlohou v této oblasti je problém nalezení *maximálního toku* v síti za podmínky respektování daných kapacit hran.



6 Orientované grafy, Toky v sítích

Nyní se budeme zabývat typem síťových úloh, ve kterých není podstatná délka hran a spojení, nýbž jejich propustnost (jako potrubní nebo počítačové sítě).

Základní úlohou v této oblasti je problém nalezení *maximálního toku* v síti za podmínky respektování daných kapacit hran.

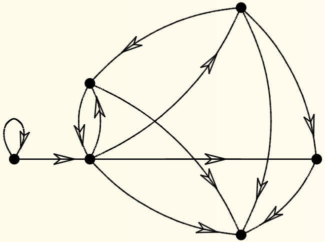


Stručný přehled lekce

* Definice a některé základní vlastnosti orientovaných grafů, souvislost.
* Sítě s kapacitami hran, hledání maximálního toku a dualita.
* Důsledky duality toku; vyšší souvislost, bipartitní párování, SRR.

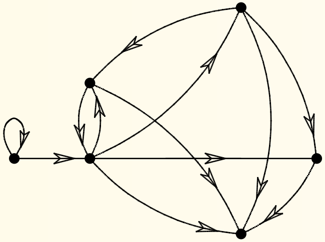
6.1 Základní pojmy orientovaných grafů

Požadavek explicitně vyjádřit směr hrany přirozeně vede na následující definici orientovaného grafu, ve kterém hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů.



6.1 Základní pojmy orientovaných grafů

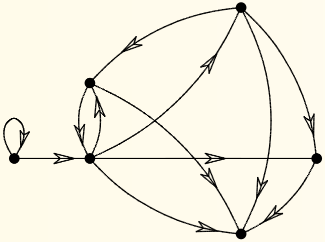
Požadavek explicitně vyjádřit směr hrany přirozeně vede na následující definici orientovaného grafu, ve kterém hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů.



Definice 6.1. **Orientovaný graf** je uspoř. dvojice $D = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$.

6.1 Základní pojmy orientovaných grafů

Požadavek explicitně vyjádřit směr hrany přirozeně vede na následující definici orientovaného grafu, ve kterém hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů.

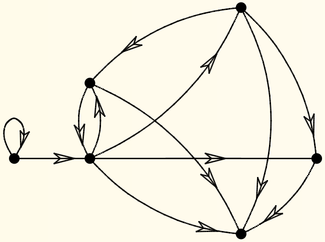


Definice 6.1. **Orientovaný graf** je uspoř. dvojice $D = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$.

Pojmy *podgrafu* a *isomorfismu* se přirozeně přenášejí na orientované grafy.

6.1 Základní pojmy orientovaných grafů

Požadavek explicitně vyjádřit směr hrany přirozeně vede na následující definici orientovaného grafu, ve kterém hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů.



Definice 6.1. **Orientovaný graf** je uspoř. dvojice $D = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$.

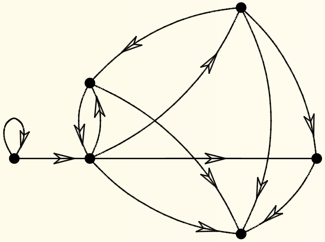
Pojmy *podgrafu* a *isomorfismu* se přirozeně přenášejí na orientované grafy.

Značení: Hrana (u, v) (zvaná také *šipka*) v orientovaném grafu D *začíná* ve vrcholu u a *končí* ve (míří do) vrcholu v. Opačná hrana (v, u) je různá od (u, v).

Speciálně hrana tvaru (u, u) se nazývá *orientovaná smyčka*.

6.1 Základní pojmy orientovaných grafů

Požadavek explicitně vyjádřit směr hrany přirozeně vede na následující definici orientovaného grafu, ve kterém hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů.

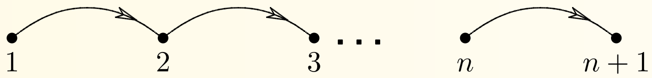


Definice 6.1. **Orientovaný graf** je uspoř. dvojice $D = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$.
Pojmy *podgrafu* a *isomorfismu* se přirozeně přenášejí na orientované grafy.

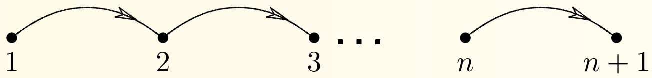
Značení: Hrana (u, v) (zvaná také *šipka*) v orientovaném grafu D *začíná* ve vrcholu u a *končí* ve (míří do) vrcholu v. Opačná hrana (v, u) je různá od (u, v).
Speciálně hrana tvaru (u, u) se nazývá *orientovaná smyčka*.

Orientované grafy odpovídají relacím, které nemusí být symetrické.

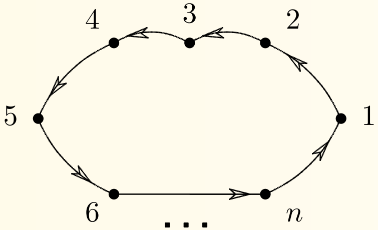
- *Orientovaná cesta* délky $n \geq 0$ je následujícím grafem na $n+1$ vrcholech



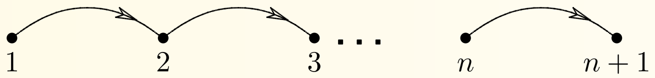
- *Orientovaná cesta* délky $n \geq 0$ je následujícím grafem na $n+1$ vrcholech



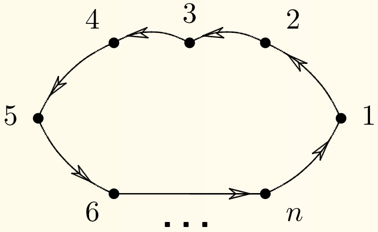
- a *orientovaná kružnice* (také *cyklus*) délky $n \geq 1$ vypadá takto:



- *Orientovaná cesta* délky $n \geq 0$ je následujícím grafem na $n+1$ vrcholech



- a *orientovaná kružnice* (také *cyklus*) délky $n \geq 1$ vypadá takto:



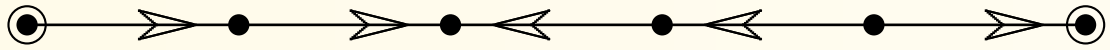
Definice: Počet hran začínajících ve vrcholu u orientovaného grafu D nazveme *výstupním stupněm* $d^+_D(u)$ a počet hran končících v u nazveme *vstupním stupněm* $d^-_D(u)$.

Součet všech výstupních stupňů je přirozeně roven součtu všech vstupních stupňů.

Souvislost na orientovaných grafech

Uvedeme si odstupňovaně tři základní pohledy:

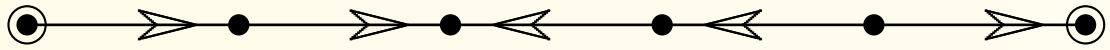
- Slabá souvislost. Jedná se o tradiční *souvislost na symetrizaci* grafu D (tj. po „zapomenutí" směru šipek).



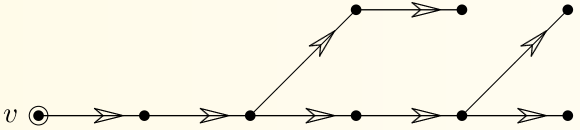
Souvislost na orientovaných grafech

Uvedeme si odstupňovaně tři základní pohledy:

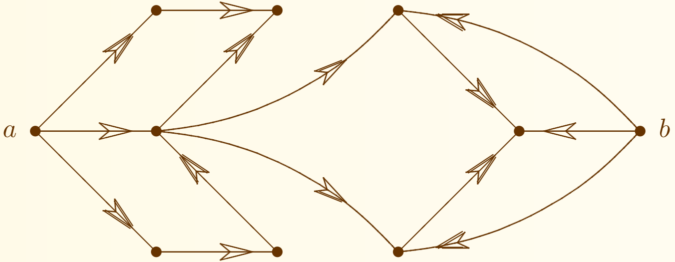
- Slabá souvislost. Jedná se o tradiční *souvislost na symetrizaci* grafu D (tj. po „zapomenutí“ směru šipek).



- Dosažitelnost (směrem „ven“). Orientovaný graf D je *dosažitelný směrem ven*, pokud v něm existuje vrchol $v \in V(D)$ takový, že každý vrchol $x \in V(D)$ je dosažitelný orientovaným sledem z v.



Podrobným zkoumáním následujícího obrázku zjistíme, že jeho graf není dosažitelný směrem ven, neboť chybí možnost dosáhnout vrchol b úplně vpravo. Na druhou stranu po vypuštění b je zbylý graf dosažitelný ven z vrcholu a vlevo.



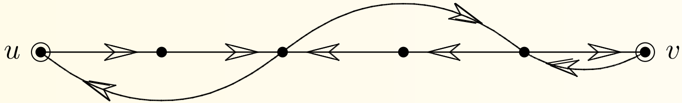
Souvislost na orientovaných grafech, silná

- Silná souvislost. Nechť $\approx$ je binární relace na vrcholové množině $V(D)$ orientovaného grafu D taková, že
  - $u \approx v$ právě když existuje dvojice orientovaných cest – jedna z u do v a druhá z v do u v grafu D.

Souvislost na orientovaných grafech, silná

- Silná souvislost. Nechť $\approx$ je binární relace na vrcholové množině $V(D)$ orientovaného grafu D taková, že
  - $u \approx v$ právě když existuje dvojice orientovaných cest – jedna z u do v a druhá z v do u v grafu D.

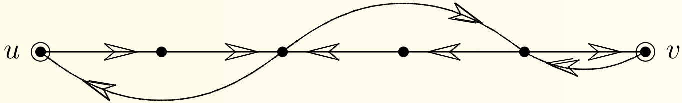
  Pak $\approx$ je relace ekvivalence.



Souvislost na orientovaných grafech, silná

- Silná souvislost. Nechť $\approx$ je binární relace na vrcholové množině $V(D)$ orientovaného grafu D taková, že
  - $*$ $u \approx v$ právě když existuje dvojice orientovaných cest – jedna z u do v a druhá z v do u v grafu D.

  Pak $\approx$ je relace ekvivalence.

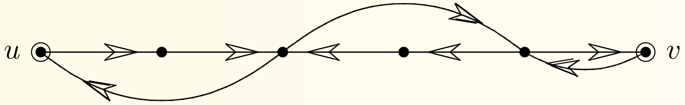


Definice 6.2. Silné komponenty orientovaného grafu D jsou třídy ekvivalence relace $\approx$ uvedené v předchozím.

Souvislost na orientovaných grafech, silná

- Silná souvislost. Nechť $\approx$ je binární relace na vrcholové množině $V(D)$ orientovaného grafu D taková, že
  - $u \approx v$ právě když existuje dvojice orientovaných cest – jedna z u do v a druhá z v do u v grafu D.

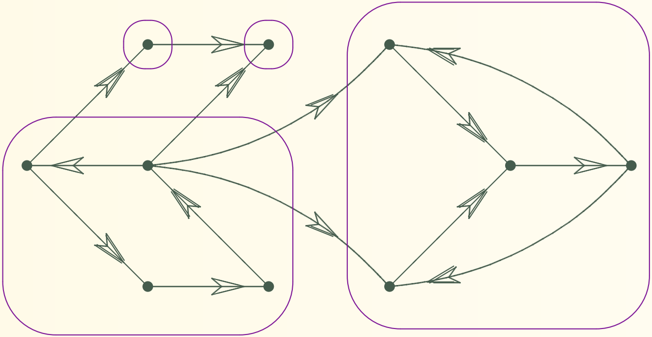
  Pak $\approx$ je relace ekvivalence.



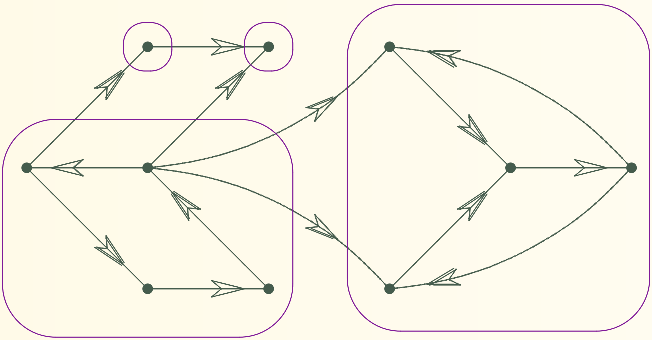
Definice 6.2. Silné komponenty orientovaného grafu D jsou třídy ekvivalence relace $\approx$ uvedené v předchozím.

Orientovaný graf D je *silně souvislý* pokud má nejvýše jednu silnou komponentu.

Pro ilustraci si mírně upravíme dříve prezentovaný orientovaný graf tak, že bude dosažitelný z nejlevějšího vrcholu. Je výsledek silně souvislý?

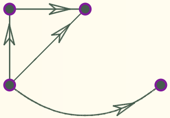


Pro ilustraci si mírně upravíme dříve prezentovaný orientovaný graf tak, že bude dosažitelný z nejlevějšího vrcholu. Je výsledek silně souvislý?



Ne, na obrázku jsou vyznačené jeho 4 silné komponenty.

Zároveň uvádíme pro ilustraci obrázek kondenzace silných komponent tohoto grafu, což je acyklický orientovaný graf s vrcholy reprezentujícími zmíněné silné komponenty a směry hran mezi nimi.



6.2 Definice sítě a toku

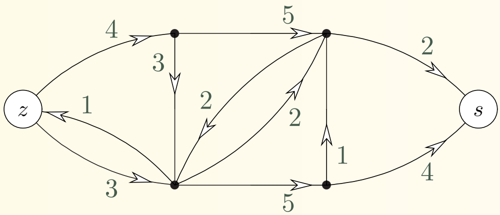
Základní strukturou pro reprezentaci sítí je vážený orientovaný graf (přičemž implicitní směr hran je v tomto kontextu nezbytný).

6.2 Definice sítě a toku

Základní strukturou pro reprezentaci sítí je vážený orientovaný graf (přičemž implicitní směr hran je v tomto kontextu nezbytný).

Definice 6.3. **Síť** je čtveřice $S = (D, z, s, w)$, kde

* D je orientovaný graf,
* vrcholy $z \in V(D)$, $s \in V(D)$ jsou *zdroj* a *stok*,
* $w : E(D) \to \mathbb{R}^+$ je kladné ohodnocení hran, zvané *kapacita hran*.

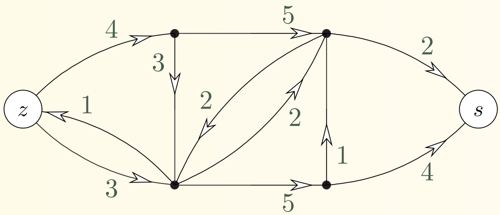


6.2 Definice sítě a toku

Základní strukturou pro reprezentaci sítí je vážený orientovaný graf (přičemž implicitní směr hran je v tomto kontextu nezbytný).

Definice 6.3. **Síť** je čtveřice $S = (D, z, s, w)$, kde

* D je orientovaný graf,
* vrcholy $z \in V(D)$, $s \in V(D)$ jsou *zdroj* a *stok*,
* $w : E(D) \to \mathbb{R}^+$ je kladné ohodnocení hran, zvané *kapacita hran*.



Poznámka: V praxi může být zdrojů a stoků více, ale v definici stačí pouze jeden zdroj a stok, z něhož / do nějž vedou hrany do ostatních zdrojů / stoků. (Dokonce pak různé zdroje a stoky mohou mít své kapacity.)

Velikost toku v síti

Značení: Pro jednoduchost píšeme ve výrazech značku $e \to v$ pro hranu e končící ve vrcholu v a $e \leftarrow v$ pro hranu e začínající z v.

Velikost toku v síti

Značení: Pro jednoduchost píšeme ve výrazech značku $e \to v$ pro hranu e končící ve vrcholu v a $e \leftarrow v$ pro hranu e začínající z v.

Definice 6.4. **Tok v síti** $S = (D, z, s, w)$ je funkce $f : E(D) \to \mathbb{R}_0^+$ splňující

* $\forall e \in E(D) : \ 0 \le f(e) \le w(e)$, (respektování kapacity)
* $\forall v \in V(D), v \neq z, s : \ \sum_{e \to v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$. (zachování substance)

Velikost toku v síti

Značení: Pro jednoduchost píšeme ve výrazech značku $e \to v$ pro hranu e končící ve vrcholu v a $e \leftarrow v$ pro hranu e začínající z v.

Definice 6.4. Tok v síti $S = (D, z, s, w)$ je funkce $f : E(D) \to \mathbb{R}_0^+$ splňující

* $\forall e \in E(D) :\ 0 \leq f(e) \leq w(e)$, (respektování kapacity)
* $\forall v \in V(D), v \neq z, s :\ \sum_{e \to v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$. (zachování substance)

Velikost toku f je dána výrazem $\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \to z} f(e)$.

Velikost toku v síti

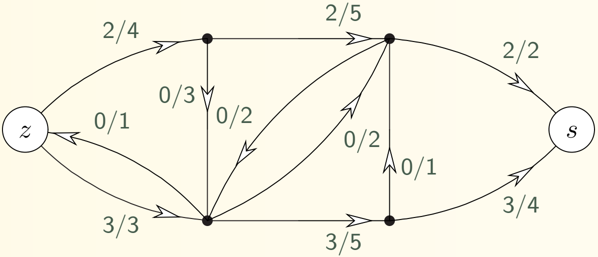
Značení: Pro jednoduchost píšeme ve výrazech značku $e \to v$ pro hranu e končící ve vrcholu v a $e \leftarrow v$ pro hranu e začínající z v.

Definice 6.4. **Tok v síti** $S = (D, z, s, w)$ je funkce $f : E(D) \to \mathbb{R}_0^+$ splňující

* $\forall e \in E(D) : \; 0 \le f(e) \le w(e)$, (respektování kapacity)
* $\forall v \in V(D), v \ne z, s : \; \sum_{e \to v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$. (zachování substance)

Velikost toku f je dána výrazem $\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \to z} f(e)$.

Značení: Tok a kapacitu hran v obrázku sítě budeme zjednodušeně zapisovat ve formátu F/C, kde F je hodnota toku na hraně a C je její kapacita.



6.3 Nalezení maximálního toku

Naším úkolem je najít co největší přípustný tok v dané síti. Pro jeho nalezení existují jednoduché a velmi rychlé algoritmy.

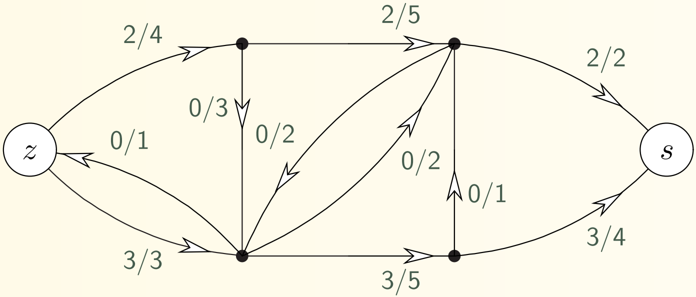
Definice 6.5. **Úloha hledání maximálního toku** v síti $S = (D, z, s, w)$.
Úkolem je v síti S najít tok f ze zdroje z do stoku s podle Definice 9.4 takový, který maximalizuje velikost $\|f\|$.

6.3 Nalezení maximálního toku

Naším úkolem je najít co největší přípustný tok v dané síti. Pro jeho nalezení existují jednoduché a velmi rychlé algoritmy.

Definice 6.5. **Úloha hledání maximálního toku** v síti $S = (D, z, s, w)$.
Úkolem je v síti S najít tok f ze zdroje z do stoku s podle Definice 9.4 takový, který maximalizuje velikost $\|f\|$.

Tok velikosti 5 uvedený v ukázce v předchozí části nebyl optimální, neboť v této síti najdeme i tok velikosti 6:

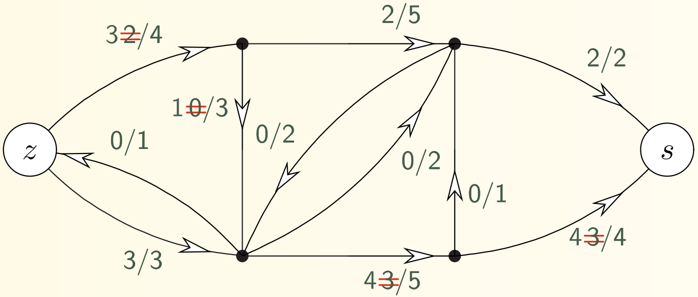


6.3 Nalezení maximálního toku

Naším úkolem je najít co největší přípustný tok v dané síti. Pro jeho nalezení existují jednoduché a velmi rychlé algoritmy.

Definice 6.5. **Úloha hledání maximálního toku** v síti $S = (D, z, s, w)$.
Úkolem je v síti S najít tok f ze zdroje z do stoku s podle Definice 9.4 takový, který maximalizuje velikost $\|f\|$.

Tok velikosti 5 uvedený v ukázce v předchozí části nebyl optimální, neboť v této síti najdeme i tok velikosti 6:



Jak však poznáme, že větší tok již v dané síti neexistuje?

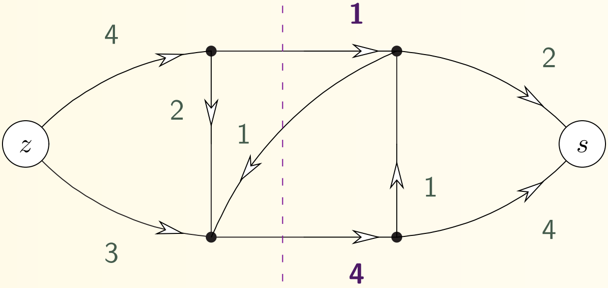
Pojem řezu v síti

Definice 6.6. **Řez v síti** $S = (D, z, s, w)$ je podmnožina hran $X \subseteq E(D)$ taková, že v podgrafu $D - X$ (tj. po odebrání hran X z D) nezbude žádná orientovaná cesta ze z do s.

Pojem řezu v síti

Definice 6.6. **Řez v síti** $S = (D, z, s, w)$ je podmnožina hran $X \subseteq E(D)$ taková, že v podgrafu $D - X$ (tj. po odebrání hran X z D) nezbude žádná orientovaná cesta ze z do s.

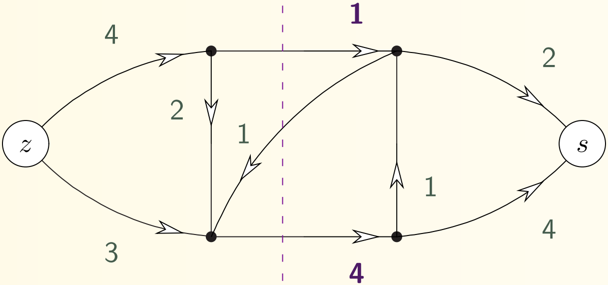
Velikostí řezu X rozumíme součet kapacit hran z X, tj. $\|X\| = \sum_{e \in X} w(e)$.



Pojem řezu v síti

Definice 6.6. **Řez v síti** $S = (D, z, s, w)$ je podmnožina hran $X \subseteq E(D)$ taková, že v podgrafu $D - X$ (tj. po odebrání hran X z D) nezbude žádná orientovaná cesta ze z do s.

Velikostí řezu X rozumíme součet kapacit hran z X, tj. $\|X\| = \sum_{e \in X} w(e)$.

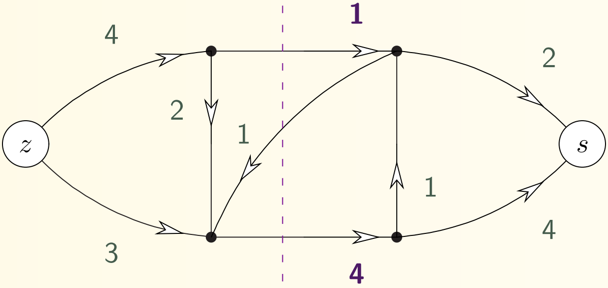


Věta 6.7. *Maximální velikost toku v síti je rovna minimální velikosti řezu.*

Pojem řezu v síti

Definice 6.6. **Řez v síti** $S = (D, z, s, w)$ je podmnožina hran $X \subseteq E(D)$ taková, že v podgrafu $D - X$ (tj. po odebrání hran X z D) nezbude žádná orientovaná cesta ze z do s.

Velikostí řezu X rozumíme součet kapacit hran z X, tj. $\|X\| = \sum_{e \in X} w(e)$.



Věta 6.7. *Maximální velikost toku v síti je rovna minimální velikosti řezu.*

V uvedeném obrázku nalezneme tok velikosti 5. Vyznačený řez má také velikost 5.

Nenasycené cesty v síti

Definice: Mějme síť S a v ní tok f. *Nenasycená cesta* P (v S vzhledem k f)

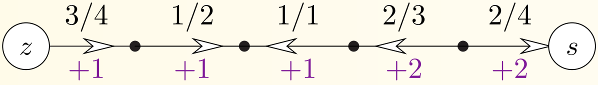
* je neorientovaná cesta v D mezi určenými vrcholy (obvykle ze z do s), tj. posloupnost navazujících libovolně orientovaných hran $e_1, e_2, \ldots, e_m$,

Nenasycené cesty v síti

Definice: Mějme síť S a v ní tok f. *Nenasycená cesta* P (v S vzhledem k f)

- $*$ je neorientovaná cesta v D mezi určenými vrcholy (obvykle ze z do s), tj. posloupnost navazujících libovolně orientovaných hran $e_1, e_2, \ldots, e_m$,
- $*$ kde $f(e_i) < w(e_i)$ pro e_i ve směru ze z do s a $f(e_j) > 0$ pro e_j jinak.

rezerva kapacity:



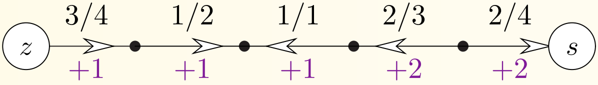
> 0

Nenasycené cesty v síti

Definice: Mějme síť S a v ní tok f. *Nenasycená cesta* P (v S vzhledem k f)

- $*$ je neorientovaná cesta v D mezi určenými vrcholy (obvykle ze z do s), tj. posloupnost navazujících libovolně orientovaných hran $e_1, e_2, \ldots, e_m$,
- $*$ kde $f(e_i) < w(e_i)$ pro e_i ve směru ze z do s a $f(e_j) > 0$ pro e_j jinak.

rezerva kapacity:



> 0

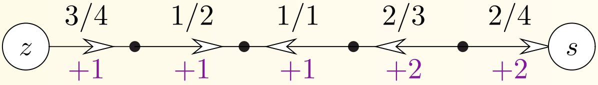
- $*$ Hodnotě $w(e_i) - f(e_i) > 0$ pro hrany e_i ve směru z u do v a hodnotě $f(e_j) > 0$ pro hrany e_j v opačném směru říkáme *rezerva kapacity* hran.

Nenasycená cesta je tudíž cesta s kladnými rezervami kapacit všech hran.

Metoda 6.8. Maximální tok vylepšováním nenasycených cest.

Základní myšlenkou této jednoduché metody hledání maximálního toku v dané síti je prostě opakovaně vylepšovat tok podél nalezených nenasycených cest.

rezerva kapacity:



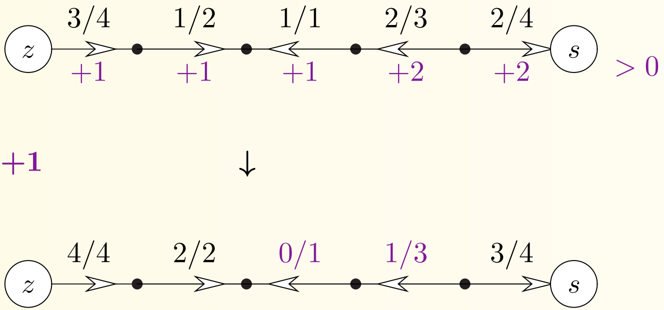
> 0

Metoda 6.8. Maximální tok vylepšováním nenasycených cest.
Základní myšlenkou této jednoduché metody hledání maximálního toku v dané síti je prostě opakovaně vylepšovat tok podél nalezených nenasycených cest.

rezerva kapacity:

min. rezerva $r = +1$

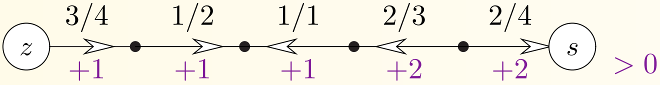
P



Metoda 6.8. Maximální tok vylepšováním nenasycených cest.

Základní myšlenkou této jednoduché metody hledání maximálního toku v dané síti je prostě opakovaně vylepšovat tok podél nalezených nenasycených cest.

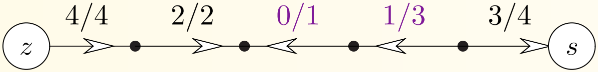
rezerva kapacity:



min. rezerva $\boldsymbol{r = +1}$

$\downarrow$

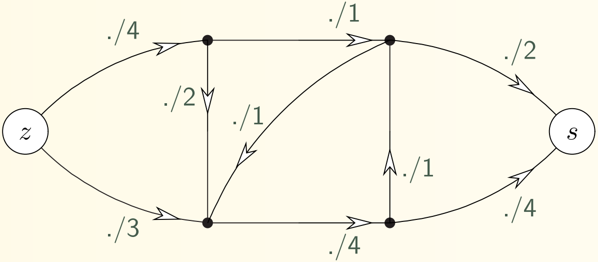
P



Pro rekapitulaci, náš tok se „vylepší" následovně;

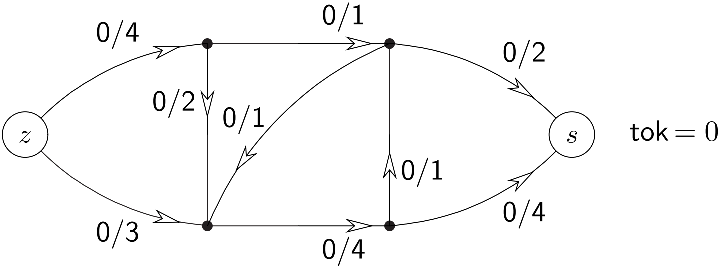
- pro hrany $e_i \in E(P)$ ve směru ze z do s zvýšíme tok na $f'(e_i) = f(e_i) + r$,
- pro hrany $e_j \in E(P)$ ve směru ze s do z snížíme tok na $f'(e_j) = f(e_j) - r$.

Výsledný tok f' pak bude opět přípustný.



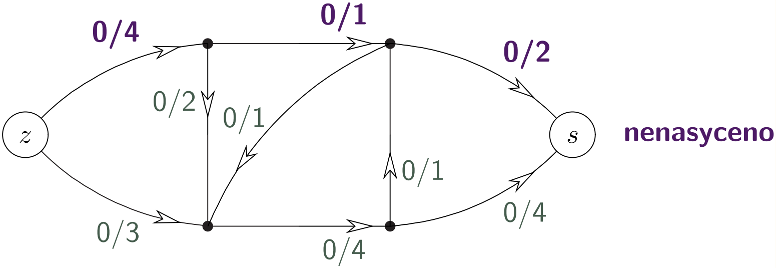
Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \ldots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  - ∗ Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  - ∗ Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    - – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.



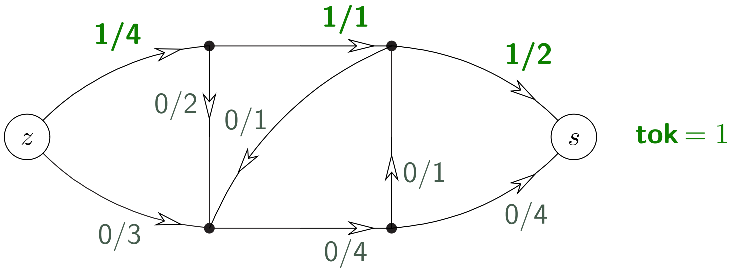
Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \ldots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  - ∗ Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  - ∗ Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    - – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- Výstup: Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D) - U$.



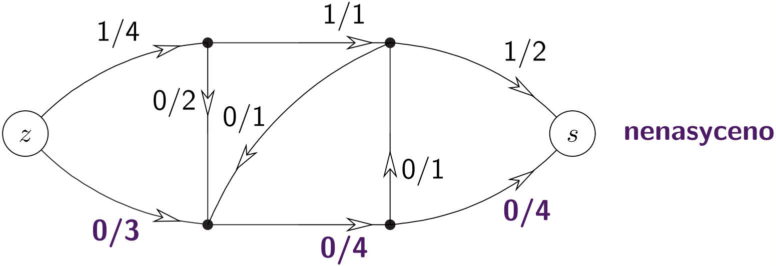
Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S=(D,z,s,w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0,0,\dots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  * Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  * Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- Výstup: Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D)-U$.



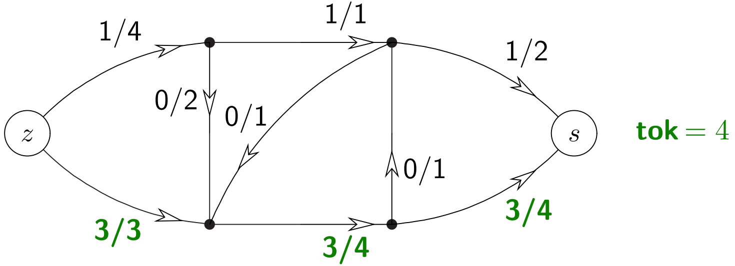
Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \ldots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  - ∗ Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  - ∗ Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    - – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- Výstup: Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D) - U$.



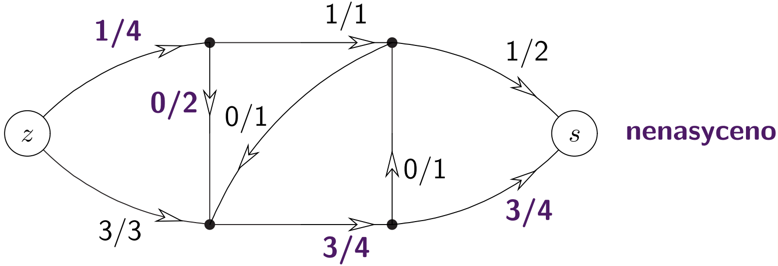
Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \ldots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  * Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  * Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- Výstup: Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D) - U$.



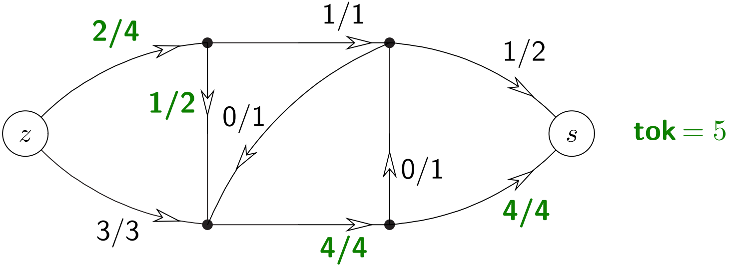
Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \ldots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  - ∗ Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  - ∗ Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    - – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- Výstup: Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D) - U$.



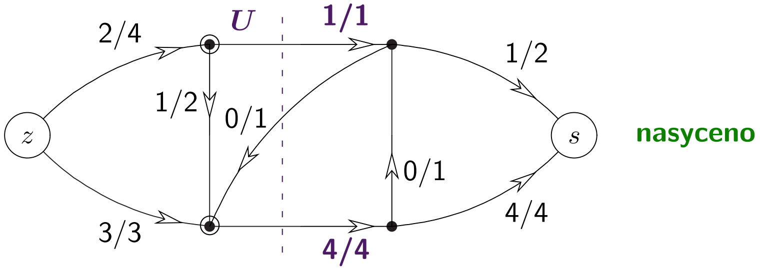
Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \dots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  * Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  * Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- Výstup: Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D) - U$.



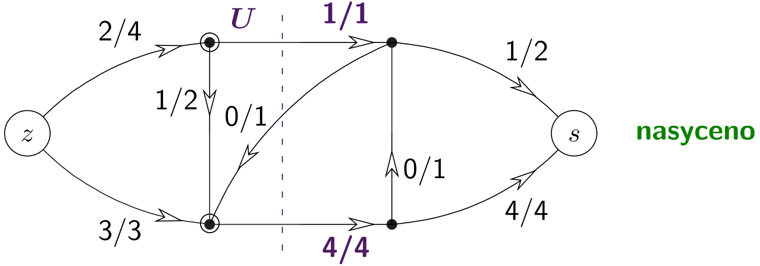
Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \ldots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  - ∗ Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  - ∗ Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- Výstup: Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D) - U$.



Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \ldots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  * Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  * Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- Výstup: Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D) - U$.



Algoritmus 6.9. Ford–Fulkersonův pro tok v síti.

- Vstup: Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \ldots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  - ∗ Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  - ∗ Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    - – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- Výstup: Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D) - U$.

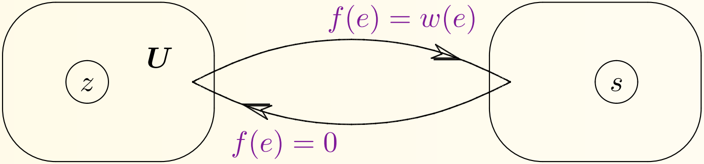
Důkaz správnosti Algoritmu 9.9:
Pro každý tok f a každý řez X v síti S platí $\|f\| \leq \|X\|$. Jestliže po zastavení algoritmu s tokem f nalezneme v síti S řez o stejné velikosti $\|X\| = \|f\|$, je jasné, že jsme našli maximální možný tok v síti S.

(Pozor, zastavení algoritmu jsme zatím nezdůvodnili.)

Důkaz správnosti Algoritmu 9.9:
Pro každý tok f a každý řez X v síti S platí $\|f\| \leq \|X\|$. Jestliže po zastavení algoritmu s tokem f nalezneme v síti S řez o stejné velikosti $\|X\| = \|f\|$, je jasné, že jsme našli maximální možný tok v síti S.

(Pozor, zastavení algoritmu jsme zatím nezdůvodnili.)

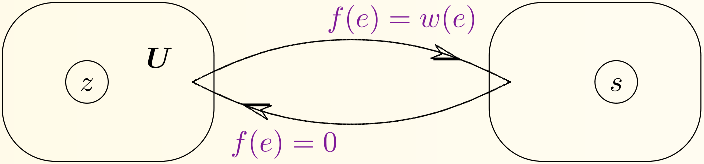
Takže dokažme, že po zastavení algoritmu nastane rovnost $\|f\| = \|X\|$, kde X je vypsaný řez mezi U a zbytkem grafu D. Vezměme tok f v S bez nenasycené cesty ze z do s. Pak množina U z algoritmu neobsahuje s.



Důkaz správnosti Algoritmu 9.9:
Pro každý tok f a každý řez X v síti S platí $\|f\| \leq \|X\|$. Jestliže po zastavení algoritmu s tokem f nalezneme v síti S řez o stejné velikosti $\|X\| = \|f\|$, je jasné, že jsme našli maximální možný tok v síti S.

(Pozor, zastavení algoritmu jsme zatím nezdůvodnili.)

Takže dokažme, že po zastavení algoritmu nastane rovnost $\|f\| = \|X\|$, kde X je vypsaný řez mezi U a zbytkem grafu D. Vezměme tok f v S bez nenasycené cesty ze z do s. Pak množina U z algoritmu neobsahuje s.



Nyní má každá hrana $e \leftarrow U$ (odch. z U) plný tok $f(e) = w(e)$ a každá hrana $e \rightarrow U$ (přich. do U) tok $f(e) = 0$, takže

$$\|f\| = \sum_{e \leftarrow U} f(e) - \sum_{e \rightarrow U} f(e) = \sum_{e \leftarrow U} f(e) = \sum_{e \in X} w(e) = \|X\| .$$

□

Důsledky Ford–Fulkersonova algoritmu

Z důkazu Algoritmu 9.9 pak odvodíme několik zajímavých faktů:

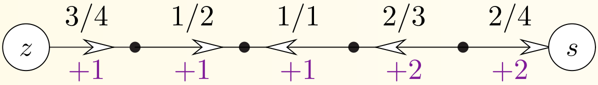
- Pokud Algoritmus 9.9 vždy skončí, dokážeme tím i platnost Věty 9.7.

Důsledky Ford–Fulkersonova algoritmu

Z důkazu Algoritmu 9.9 pak odvodíme několik zajímavých faktů:

- Pokud Algoritmus 9.9 vždy skončí, dokážeme tím i platnost Věty 9.7.
- Pro celočíselné kapacity hran sítě S Algoritmus 9.9 vždy skončí.

rezerva kapacity:



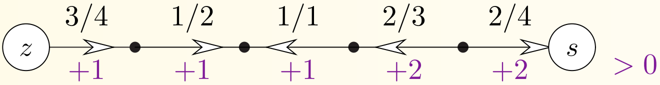
> 0

Důsledky Ford–Fulkersonova algoritmu

Z důkazu Algoritmu 9.9 pak odvodíme několik zajímavých faktů:

- Pokud Algoritmus 9.9 vždy skončí, dokážeme tím i platnost Věty 9.7.
- Pro celočíselné kapacity hran sítě S Algoritmus 9.9 vždy skončí.

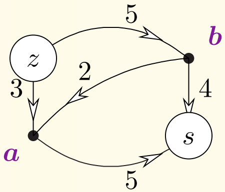
rezerva kapacity:



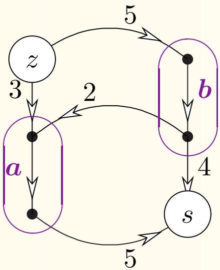
- Pokud jsou kapacity hran sítě S celočíselné, opt. tok také vyjde celočíselně.

6.4 Zobecněné použití sítí

- **Sítě s kapacitami vrcholů:**
  U sítě můžeme zadat *kapacity vrcholů*, neboli kapacitní váhová funkce je dána jako $w : E(D) \cup V(D) \to \mathbb{R}^+$.

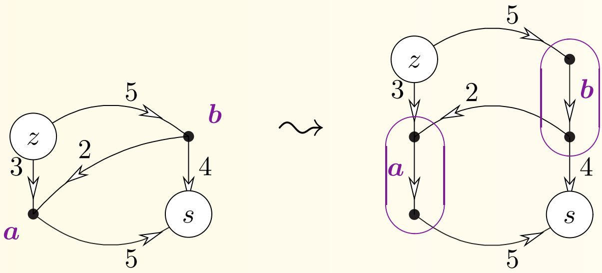


$\rightsquigarrow$



6.4 Zobecněné použití sítí

- **Sítě s kapacitami vrcholů:**
  U sítě můžeme zadat *kapacity vrcholů*, neboli kapacitní váhová funkce je dána jako $w : E(D) \cup V(D) \to \mathbb{R}^+$.



- **Sítě s dolními kapacitami:**
  Pro hrany sítě lze zadat také jejich *minimální kapacity*, tedy dolní meze přípustného toku, jako váhovou funkci $\ell : E(D) \to \mathbb{R}_0^+$.

$$\ell(e) \le f(e) \le w(e)$$

Bipartitní párování

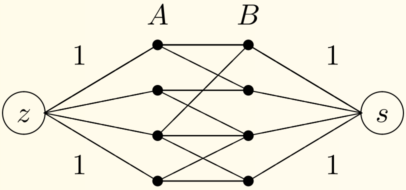
Definice: *Párování* v (nyní bipartitním) grafu G je podmnožina hran $M \subset E(G)$ taková, že žádné dvě hrany z M nesdílejí koncový vrchol.

Bipartitní párování

Definice: *Párování* v (nyní bipartitním) grafu G je podmnožina hran $M \subset E(G)$ taková, že žádné dvě hrany z M nesdílejí koncový vrchol.

Metoda 6.11. Nalezení bipartitního párování

Pro daný bipartitní graf G s vrcholy rozdělenými do množin A, B sestrojíme síť S následovně:

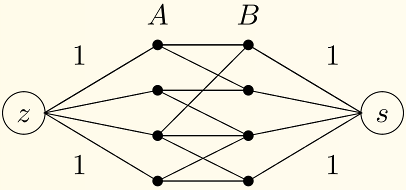


Bipartitní párování

Definice: *Párování* v (nyní bipartitním) grafu G je podmnožina hran $M \subset E(G)$ taková, že žádné dvě hrany z M nesdílejí koncový vrchol.

Metoda 6.11. Nalezení bipartitního párování

Pro daný bipartitní graf G s vrcholy rozdělenými do množin A, B sestrojíme síť S následovně:



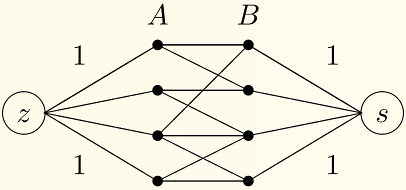
- Hrany sítě S orientujeme od zdroje do stoku a přiřadíme jim kapacity 1.

Bipartitní párování

Definice: *Párování* v (nyní bipartitním) grafu G je podmnožina hran $M \subset E(G)$ taková, že žádné dvě hrany z M nesdílejí koncový vrchol.

Metoda 6.11. Nalezení bipartitního párování

Pro daný bipartitní graf G *s vrcholy rozdělenými do množin* A, B *sestrojíme síť* S *následovně:*



- Hrany sítě S orientujeme od zdroje do stoku a přiřadíme jim kapacity 1.
- Nyní najdeme (celočíselný) maximální tok v S Algoritmem 9.9.

Do párování vložíme ty hrany grafu G, které mají nenulový tok.

Výběr různých reprezentantů

Definice: Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. *Systémem různých reprezentantů* množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nazýváme takovou posloupnost různých prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, že $x_i \in M_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

Výběr různých reprezentantů

Definice: Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. *Systémem různých reprezentantů* množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nazýváme takovou posloupnost různých prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, že $x_i \in M_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

Věta 6.12. (Hall) *Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. Pro tyto množiny existuje systém různých reprezentantů, právě když platí*

$$\forall J \subset \{1, 2, \ldots, k\} : \left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|,$$

neboli pokud sjednocení libovolné skupiny z těchto množin má alespoň tolik prvků, kolik množin je sjednoceno.

Důkaz lze podat konstrukcí vhodné sítě podobné té v Metodě 9.11:

Výběr různých reprezentantů

Definice: Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. *Systémem různých reprezentantů* množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nazýváme takovou posloupnost různých prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, že $x_i \in M_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

Věta 6.12. (Hall) *Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. Pro tyto množiny existuje systém různých reprezentantů, právě když platí*

$$\forall J \subset \{1, 2, \ldots, k\} : \left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J| \,,$$

neboli pokud sjednocení libovolné skupiny z těchto množin má alespoň tolik prvků, kolik množin je sjednoceno.

Důkaz lze podat konstrukcí vhodné sítě podobné té v Metodě 9.11:

- Použijí se speciální vrcholy u a v odpovídající zdroji a stoku;
- další vrcholy reprezentují (zleva) množiny a (vpravo) prvky naší úlohy a

Výběr různých reprezentantů

Definice: Nechť $M_1, M_2, \dots, M_k$ jsou neprázdné množiny. *Systémem různých reprezentantů* množin $M_1, M_2, \dots, M_k$ nazýváme takovou posloupnost různých prvků $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, že $x_i \in M_i$ pro $i = 1, 2, \dots, k$.

Věta 6.12. (Hall) *Nechť $M_1, M_2, \dots, M_k$ jsou neprázdné množiny. Pro tyto množiny existuje systém různých reprezentantů, právě když platí*

$$\forall J \subset \{1, 2, \dots, k\} : \left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J| \,,$$

neboli pokud sjednocení libovolné skupiny z těchto množin má alespoň tolik prvků, kolik množin je sjednoceno.

Důkaz lze podat konstrukcí vhodné sítě podobné té v Metodě 9.11:

- Použijí se speciální vrcholy u a v odpovídající zdroji a stoku;
- další vrcholy reprezentují (zleva) množiny a (vpravo) prvky naší úlohy a
- ostatní hrany mimo zdrojové a stokové (kapacity 1) vždy spojují množinu M_j se všemi jejími prvky x_i. □