Základy počítačové grafiky

Geometrické transformace ve 2D a 3D

Michal Španěl
Tomáš Milet

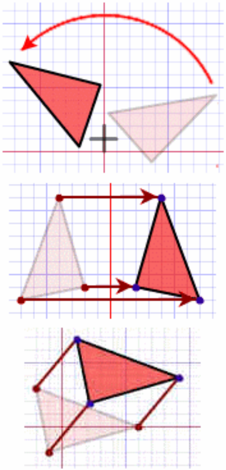
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
Ústav počítačové grafiky a multimédií

Brno 2023

Cíl přednášky

Bez geometrických transformací není moderní vektorové počítačové grafiky a její hardwarové akcelerace!

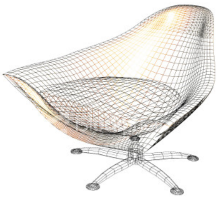
Seznámit se s principy transformací vektorových objektů ve 2D a 3D prostoru.

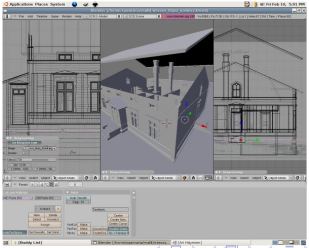


Obsah

Geometrické transformace vektorových objektů

- Popis objektů založen na *uzlových bodech*, *vrcholech*.
- Vytváření a zobrazování objektů → posouvání, otáčení, zmenšení/zvětšení vrcholů
- Nejčastější operace v současné grafice!
- *HW implementace transformací* je od počátku součástí GPU akcelerace.





První vektorová 3D grafika ...

- Slabý výpočetní výkon, nulová podpora grafiky.
- Jednoduché objekty a geometrické transformace – *základ veškerého zobrazování*.

Počítačová 3D grafika včera ...

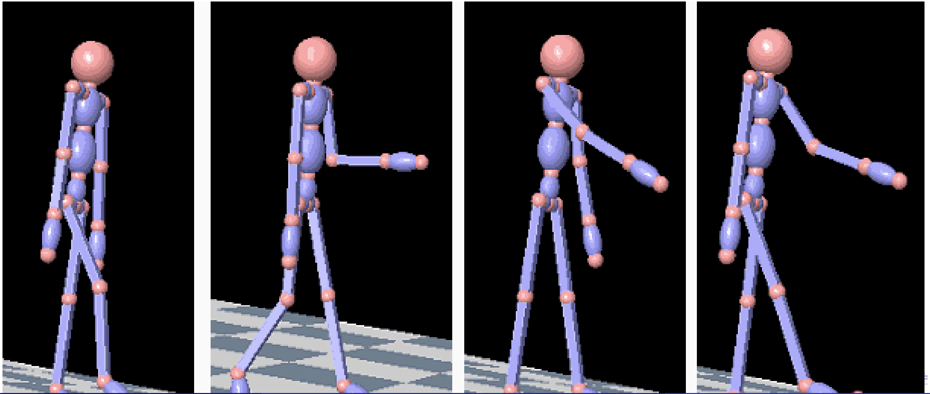
- Osvětlení, stínování, texturování, částicové systémy, ...
- *HW akcelerace*.
- Stále "stejné" geometrické transformace!

Počítačová 3D grafika dnes ...

- Generování geometrie, šíření světla, ...
- Masivní *HW akcelerace*.
- Pořád "stejné" geometrické transformace!

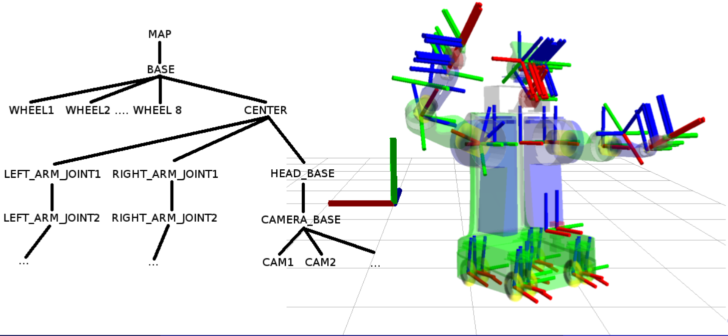
Animace kloubových soustav

- Postava složena z dílčích modelů.
- Animace realizována pomocí transformací aplikovaných na jednotlivé části.



Vztahy mezi komponenty

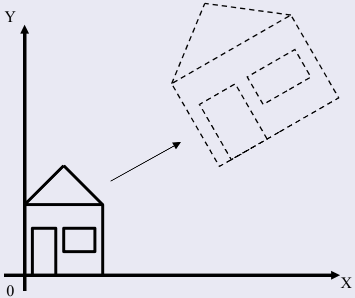
- Vztahy mezi komponenty
- Pozice v prostoru
- Strom transformací (hledání cesty)

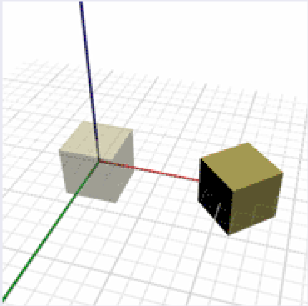


Způsob aplikace transformace

Změna polohy vrcholů objektu v souřadném systému

- Operace s objekty (posunutí, rotace, atd.).

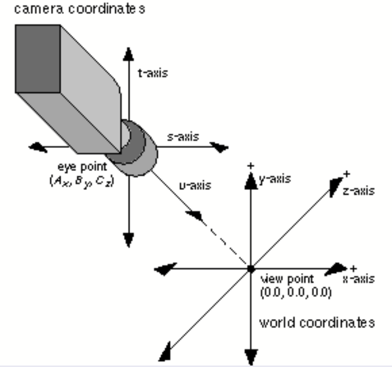




Způsob aplikace transformace, pokr.

Změna souřadného systému do vhodnější pozice

- Např. pro zjednodušení výpočtu perspektivní/paralelní projekce.

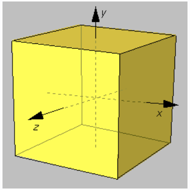


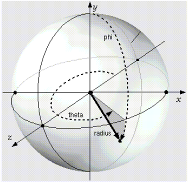
Zobrazování 3D scény

- 3D modely jednotlivých objektů.
- Model scény (rozmístění objektů, poloha kamery, apod.).

3D model objektu

- Nejčastěji obecný model (koule, židle, atd.)
- Vhodně zvolený souřadný systém.



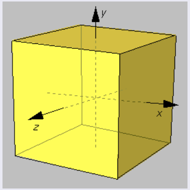


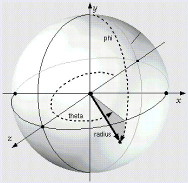
Zobrazování 3D scény

- 3D modely jednotlivých objektů.
- Model scény (rozmístění objektů, poloha kamery, apod.).

3D model objektu

- Nejčastěji obecný model (koule, židle, atd.)
- Vhodně zvolený souřadný systém.

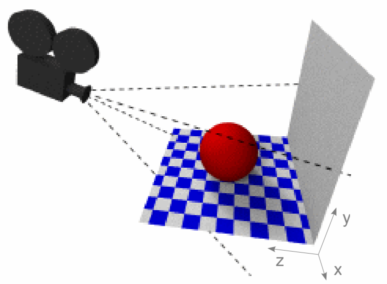




Zobrazování 3D scény, pokr.

Vytvoření 3D scény - souřadný systém scény (*world coordinates*)

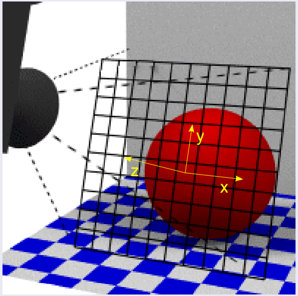
- Umístění objektu do scény $\rightarrow$ transformace do prostoru scény (posunutí, rotace, apod.).
- Definice kamery (poloha, směr, úhel).

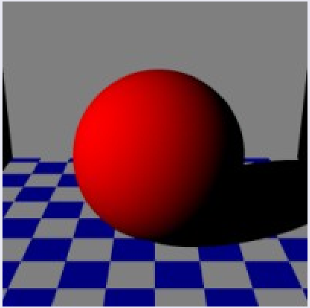


Zobrazování 3D scény, pokr.

Zobrazení scény

- Transformace do souřadného systému kamery.
- (Perspektivní) projekce.





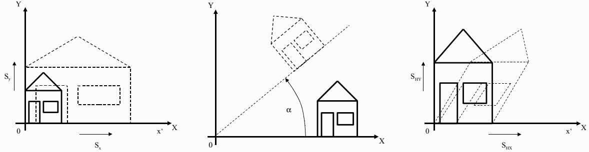
Lineární transformace

Definice

Lineární transformace je zobrazení f z jednoho vektorového prostoru do druhého $f: V \rightarrow W$, které zachovává lineární kombinace. Pro libovolné dva vektory $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ a skalár α platí:

$$f(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2}),$$
$$f(\alpha\vec{x_1}) = \alpha f(\vec{x_1}).$$

Měřítko, rotace a zkosení jsou lineární transformace



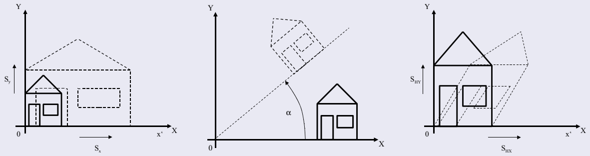
Lineární transformace

Definice

Lineární transformace je zobrazení f z jednoho vektorového prostoru do druhého $f: V \to W$, které zachovává lineární kombinace. Pro libovolné dva vektory $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ a skalár α platí:

$$f(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2}),$$
$$f(\alpha \vec{x_1}) = \alpha f(\vec{x_1}).$$

Měřítko, rotace a zkosení jsou lineární transformace



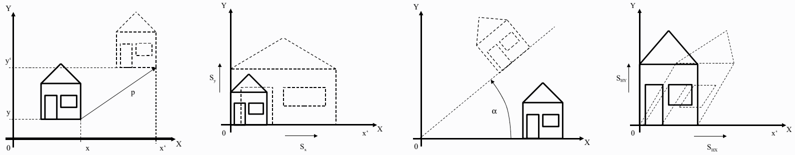
Afinní transformace

Definice

Afinní transformace je zobrazení f z jednoho vektorového prostoru do druhého $f: V \to W$, které zachovává kolinearitu (tzn. body ležící na přímce budou ležet na přímce i po zobrazení) a dělící poměr.

Lze vyjádřit jako lineární transformaci následovanou posunem.

Všechny základní geometrické transformace jsou afinní



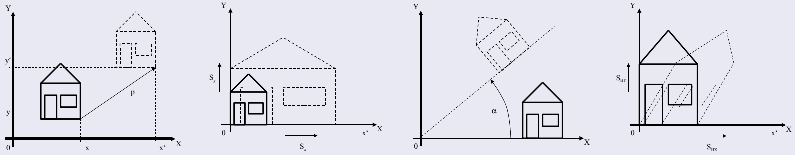
Afinní transformace

Definice

Afinní transformace je zobrazení f z jednoho vektorového prostoru do druhého $f: \ V \rightarrow W$, které zachovává kolinearitu (tzn. body ležící na přímce budou ležet na přímce i po zobrazení) a dělící poměr.

Lze vyjádřit jako lineární transformaci následovanou posunem.

Všechny základní geometrické transformace jsou afinní



Obsah

Homogenní souřadnice ve 2D

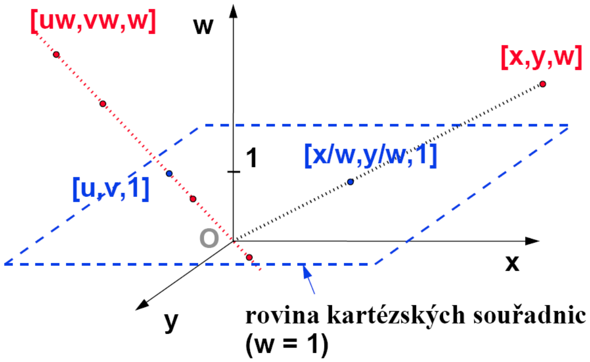
- Jednotná reprezentace základních transformací pomocí *maticového zápisu* (viz. dále).
- Umožňují skládání transformací.
- Realizace perspektivní projekce.

Definice

Homogenní souřadnice bodu ve 2D s kartézskými souřadnicemi $[x, y]$ je uspořádaná trojice $[X, Y, w]$ pro kterou platí $x = X/w$ a $y = Y/w$. Souřadnici w nazýváme váhou bodu.

- V případě afinních transformací je $w = 1$.
- Vektory $\vec{v} = (x, y)$ reprezentujeme trojicí $\vec{v} = (x, y, 0)$, kde $w = 0$.

Geometrická představa homogenních souřadnic ve 2D



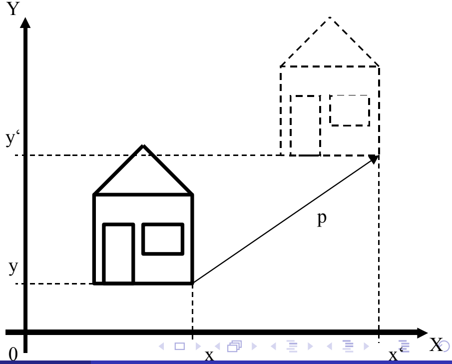
Posunutí ve 2D (angl. translation)

- Posunutí bodu v rovině s homogenními souřadnicemi $P(x, y, 1)$.
- Vektor posunutí $\vec{T}(d_x, d_y)$.
- $x' = x + d_x, \quad y' = y + d_y$

Maticový zápis transformace

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T \cdot P$$



Inverzní transformace (posunutí opačným směrem)

Maticový zápis inverzní transformace

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T^{-1} \cdot P \qquad (P = T^{-1} \cdot T \cdot P)$$

Transformační matice pro posunutí ve 2D

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzní transformace (posunutí opačným směrem)

Maticový zápis inverzní transformace

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T^{-1} \cdot P \qquad (P = T^{-1} \cdot T \cdot P)$$

Transformační matice pro posunutí ve 2D

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekvivalentní maticové zápisy 2D afinních transformací

Matice x Sloupcový vektor – např. knihovna GLM

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P' = M \cdot P$$

Řádkový vektor x Matice

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \cdot \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 \\ c_0 & c_1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P' = P \cdot M^T$$

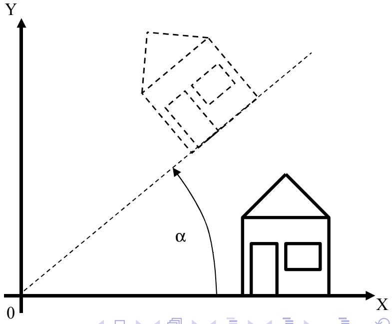
Otočení ve 2D (rotation)

- Otočení bodu v rovině s homogenními souřadnicemi $P(x, y, 1)$ o úhel α.
- Střed otáčení v počátku souřadného systému.
- $x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha, \quad y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$

Maticový zápis transformace

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

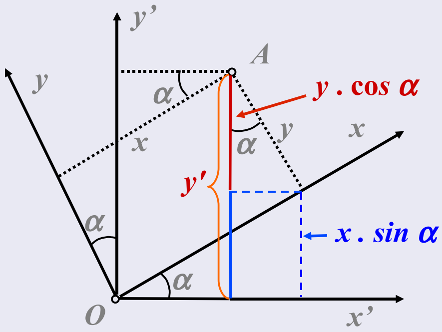
$$P' = R \cdot P$$



Otočení ve 2D, pokr.

Odvození transformace

- $y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$



Inverzní transformace

Transformační matice pro otočení ve 2D

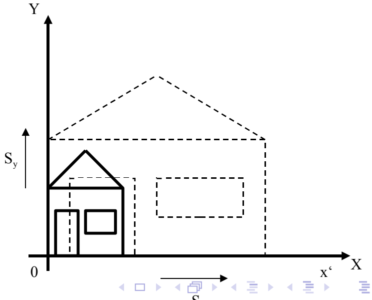
$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Změna měřítka ve 2D (scale)

- Změna měřítka s faktory S_x a S_y ve směru jednotlivých os.
- $S_{x,y} > 1 \rightarrow$ zvětšení.
- $0 < S_{x,y} < 1 \rightarrow$ zmenšení.
- $S_{x,y} < 0 \rightarrow$ dochází k převrácení (zrcadlení).
- $x' = x \cdot S_x, \quad y' = y \cdot S_y$

Transformační matice

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

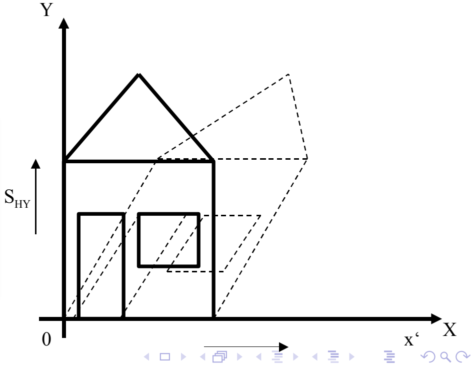


Zkosení ve 2D (shear)

- Zkosení bodu v rovině s homogenními souřadnicemi $P(x, y, 1)$ a faktory zkosení S_{hx} a S_{hy}.
- $x' = x + S_{hx} \cdot y, \quad y' = y + S_{hy} \cdot x$

Transformační matice

$$S_H = \begin{bmatrix} 1 & S_{hx} & 0 \\ S_{hy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -S_{hx} & 0 \\ -S_{hy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

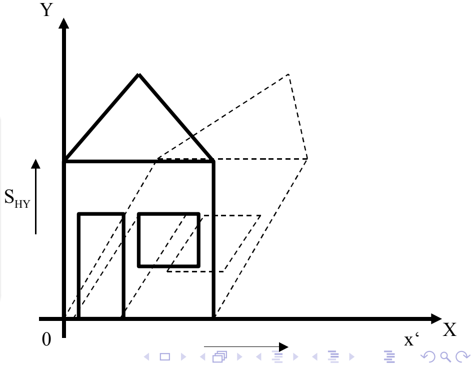


Zkosení ve 2D (shear)

- Zkosení bodu v rovině s homogenními souřadnicemi $P(x, y, 1)$ a faktory zkosení S_{hx} a S_{hy}.
- $x' = x + S_{hx} \cdot y, \quad y' = y + S_{hy} \cdot x$

Transformační matice

$$S_H = \begin{bmatrix} 1 & S_{hx} & 0 \\ S_{hy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -S_{hx} & 0 \\ -S_{hy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



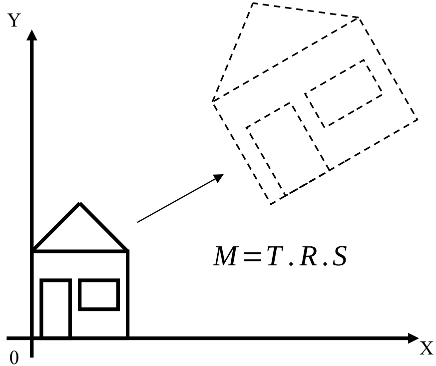
Příklad - zkosení trojúhelníku

- Mějme čtverec ABC, kde A=(0, 0), B=(2, 0), C=(0, 2)
- Aplikujte zkosení $1,5$ ve směru osy X
- Transformační matice:

$$S_H = \begin{bmatrix} 1 & S_{hx} & 0 \\ S_{hy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

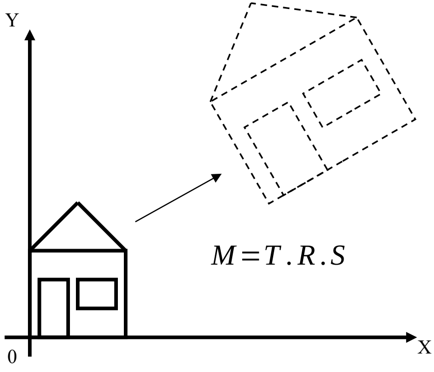
Skládání transformací

- Každá afinní transformace se dá rozložit na základní transformace.
- Transformace složená ze základních transformací se dá vyjádřit jedinou maticí!
- *Skládání se provádí násobením matic.*
- Záleží na pořadí transformací!
- Matice násobíme zleva v opačném pořadí! (Platí pro notaci se sloupcovými vektory)!



Skládání transformací

- Každá afinní transformace se dá rozložit na základní transformace.
- Transformace složená ze základních transformací se dá vyjádřit jedinou maticí!
- *Skládání se provádí násobením matic.*
- Záleží na pořadí transformací!
- Matice násobíme zleva v opačném pořadí! (Platí pro notaci se sloupcovými vektory)!



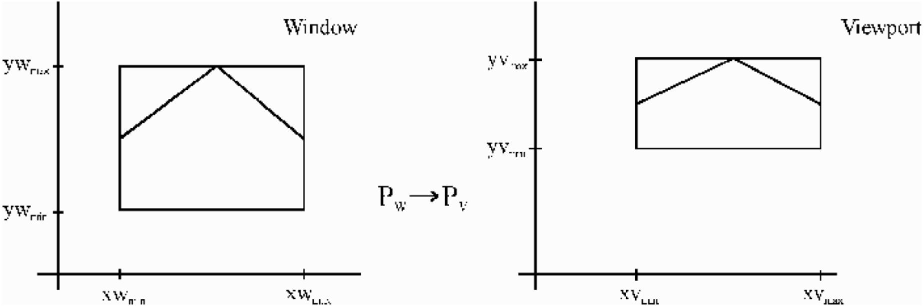
Příklad - skládání transformací

- Mějme trojúhelník ABC, kde A=(2, 2), B=(4, 2), C=(2, 3)
- Otočte tento čtverec okolo bodu P=(3, 2) o úhel $\alpha = \pi/2$
- Transformační matice:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformace okna pohledu



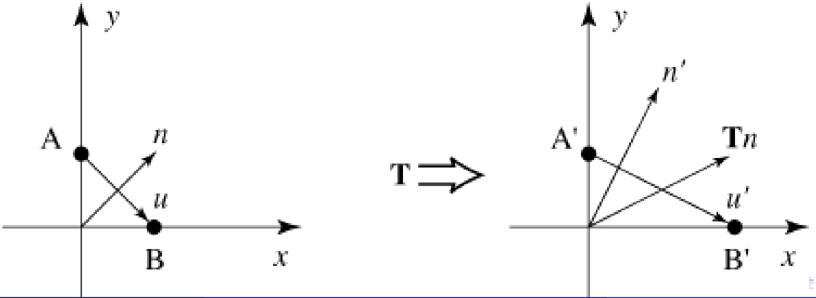
$$x' = s_x(x - xw_{min}) + xv_{max} \quad s_x = \frac{xv_{max} - xv_{min}}{xw_{max} - xw_{min}}$$

$$y' = s_y(y - yw_{min}) + yv_{max} \quad s_y = \frac{yv_{max} - yv_{min}}{yw_{max} - yw_{min}}$$

Transformace normály

- Směrové vektory v homogenních souřadnicích $\vec{v} = (x, y, 0)$ transformujeme stejně jako body.
- Neplatí pro normálové vektory
- Transformace normál provádíme *násobením inverzní transpozicí matice M:*

$$\vec{n}' = {M^{-1}}^T \cdot \vec{n}$$



Příklad - transformace normálového vektoru

- Mějme vektor $\vec{v} = (1, 1, 0)$ a jeho normálu $\vec{n} = (-1, 1, 0)$
- Vypočítejte $\vec{v}'$ a $\vec{n}'$, aplikujte měřítko $S_x = 2$ a $S_y = 1$
- Transformační matice:

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsah

Transformace ve 3D

- Zobecnění 2D transformací.
- Body popsány homogenními 3D souřadnicemi $P(x, y, z, w)$, kde $w = 1$ pro bod a $w = 0$ pro vektor.
- *Skládání transformací* – násobením dílčích matic.

Maticový zápis

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = M \cdot P$$

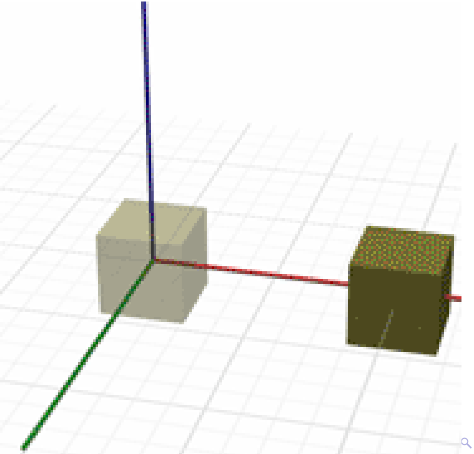
Posunutí ve 3D

- Pouhé rozšíření dimenze 2D matice.

Transformační matice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 & -d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



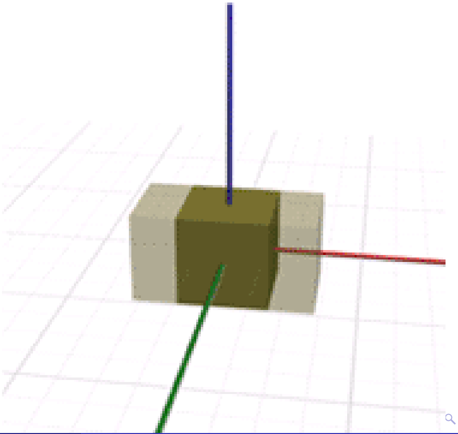
Změna měřítka ve 3D

- Opět pouhé rozšíření dimenze 2D matice.

Transformační matice

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Zkosení ve 3D

- Tři transformační matice S_{HX}, S_{HY}, S_{HZ} pro zkosení ve směrech os X, Y a Z.

Transformační matice

$$S_{HX} = \begin{bmatrix} 1 & S_{hy} & S_{hz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_{HY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{hx} & 1 & S_{hz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

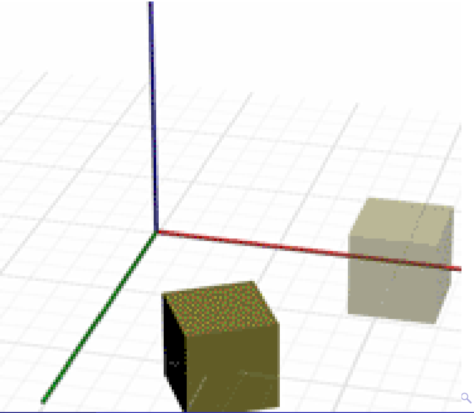
$$S_{HZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_{hx} & S_{hy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotace ve 3D

- Rotace kolem počátku souřadného systému.
- Různé transformační matice R_x, R_y, R_z pro rotaci okolo souřadných os X, Y a Z.

Příklad transformační matice

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotace ve 3D, pokr.

Transformační matice

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

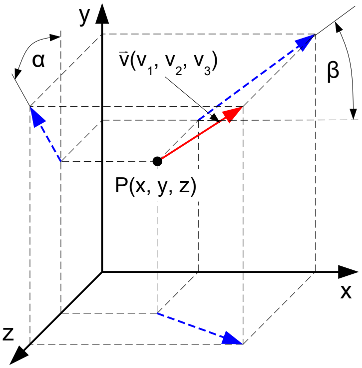
$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotace ve 3D kolem obecné osy

- Osa rotace je dána směrovým vektorem $\vec{v}$ a bodem umístění P.
- Je třeba rozložit na posloupnost několika transformací...

Postup obecné rotace

- Posunutí osy do počátku.
- Otočení osy o úhel α do jedné ze souřadných rovin (na obrázku XY).
- Otočení sklopené osy do jedné ze souřadných os (X).
- Provedení požadované rotace o úhel ω kolem příslušné osy (X).
- Vrácení osy do původní polohy.

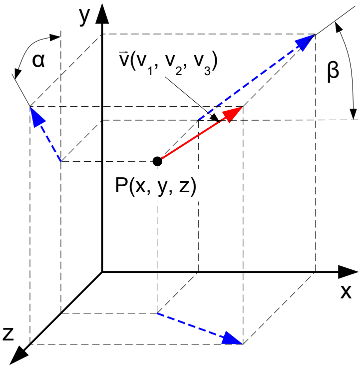


Rotace ve 3D kolem obecné osy

- Osa rotace je dána směrovým vektorem $\vec{v}$ a bodem umístění P.
- Je třeba rozložit na posloupnost několika transformací...

Postup obecné rotace

- Posunutí osy do počátku.
- Otočení osy o úhel α do jedné ze souřadných rovin (na obrázku XY).
- Otočení sklopené osy do jedné ze souřadných os (X).
- Provedení požadované rotace o úhel ω kolem příslušné osy (X).
- Vrácení osy do původní polohy.



Rotace ve 3D kolem obecné osy, pokr.

Maticový zápis

$$M = T^{-1} \cdot R^{-1}_{X(\alpha)} \cdot R^{-1}_{Z(\beta)} \cdot R_{X(\omega)} \cdot R_{Z(\beta)} \cdot R_{X(\alpha)} \cdot T$$

- α ... směrový kosinus průmětu vektoru osy do kolmé souřadné roviny (YZ)
- β ... směrový kosinus průmětu vektoru osy do kolmé souřadné roviny (YX)

Pozn.

- Rotaci kolem obecné osy procházející počátkem lze rozložit na dílčí rotace kolem os X, Y a Z - tzv. Eulerovy úhly

Rotace ve 3D kolem obecné osy, pokr.

Maticový zápis

$$M = T^{-1} \cdot R^{-1}_{X(\alpha)} \cdot R^{-1}_{Z(\beta)} \cdot R_{X(\omega)} \cdot R_{Z(\beta)} \cdot R_{X(\alpha)} \cdot T$$

- α ...směrový kosinus průmětu vektoru osy do kolmé souřadné roviny (YZ)
- β ...směrový kosinus průmětu vektoru osy do kolmé souřadné roviny (YX)

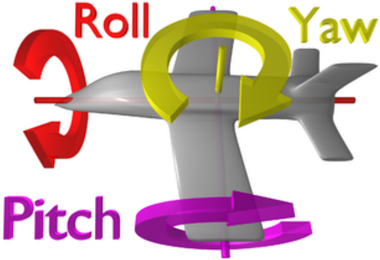
Pozn.

- Rotaci kolem obecné osy procházející počátkem lze rozložit na dílčí rotace kolem os X, Y a Z - tzv. Eulerovy úhly

Trable s Eulerovými úhly

Eulerovy úhly

- Rotace podle tří základních os - yaw, pitch, roll
- ZXZ, XYX, ... (12 kombinací)



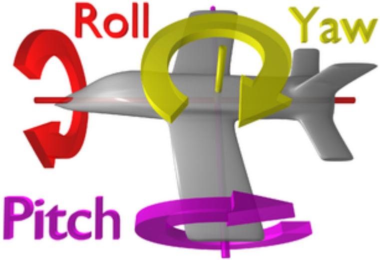
Pozor!

- Záleží na pořadí dílčích rotací.
- Spojitá rotace může způsobit skokovou změnu některých úhlů.
- Gimbal lock...

Trable s Eulerovými úhly

Eulerovy úhly

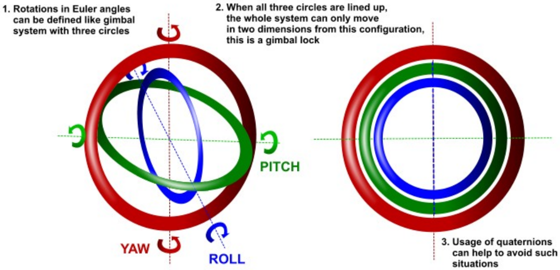
- Rotace podle tří základních os - yaw, pitch, roll
- ZXZ, XYX, ... (12 kombinací)



Pozor!

- Záleží na pořadí dílčích rotací.
- Spojitá rotace může způsobit skokovou změnu některých úhlů.
- Gimbal lock...

Trable s Eulerovými úhly



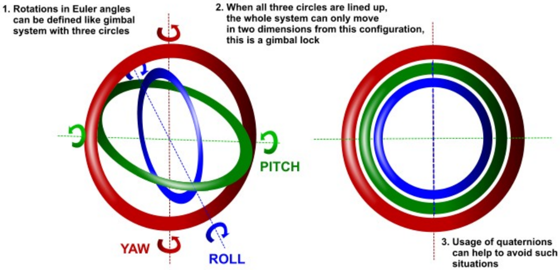
Gimbal lock

- Ztráta stupňů volnosti při nevhodném natočení "kruhů" (gimbals)

Kvaterniony

- Robustnější způsob práce s rotačními transformacemi

Trable s Eulerovými úhly



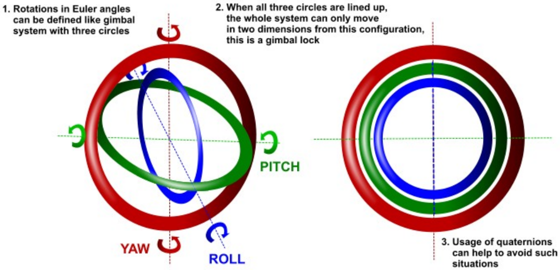
Gimbal lock

- Ztráta stupňů volnosti při nevhodném natočení ”kruhů” (gimbals)

Kvaterniony

- Robustnější způsob práce s rotačními transformacemi

Trable s Eulerovými úhly



Gimbal lock

- Ztráta stupňů volnosti při nevhodném natočení "kruhů" (gimbals)

Kvaterniony

- Robustnější způsob práce s rotačními transformacemi

Obsah

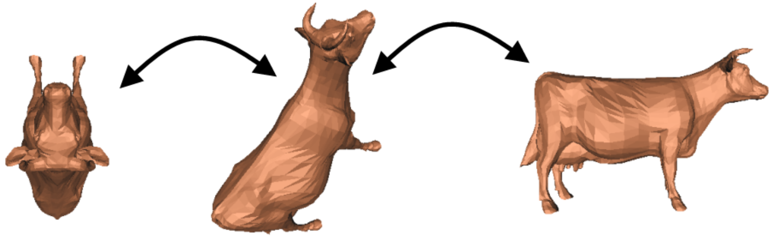
Rotace pomocí transformačních matic

Nejsou vždy nejefektivnější

- Např. stačily by 3 úhly natočení...

Jsou obtížně interpolovatelné

- Jak realizovat postupný přechod z jedné polohy do druhé?



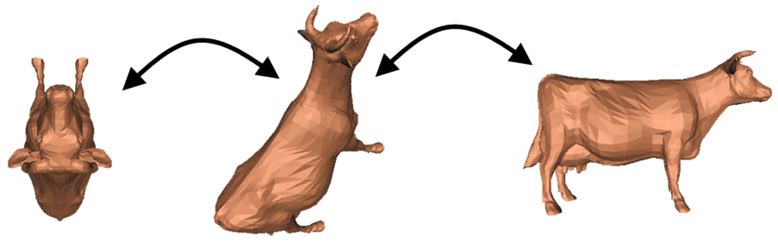
Rotace pomocí transformačních matic

Nejsou vždy nejefektivnější

- Např. stačily by 3 úhly natočení...

Jsou obtížně interpolovatelné

- Jak realizovat postupný přechod z jedné polohy do druhé?



Kvaterniony

- W. R. Hamilton v 19.století
- Efektivní způsob reprezentace rotace ve 3D.
- Kvantová mechanika, počítačová animace, atd.

Reprezentace kvaternionu

$$q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$$

Kvaterniony

- W. R. Hamilton v 19.století
- Efektivní způsob reprezentace rotace ve 3D.
- Kvantová mechanika, počítačová animace, atd.

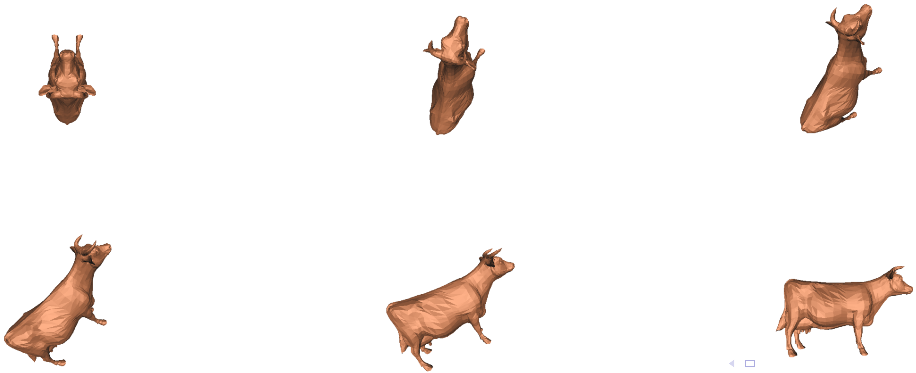
Reprezentace kvaternionu

$$q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$$

Příklad - Interpolace pomocí kvaternionů

SLERP – Sférická lineární interpolace...

- `https://nccastaff.bournemouth.ac.uk/jmacey/WebGL/QuatSlerp/`



Kvaternion jako rozšíření komplexních čísel

- Kvaternion je lineární kombinací prvků $1, i, j, k$.
- $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$
- Jedna reálná, tři imaginární složky.

Platí vztahy

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
$$i = jk = -kj$$
$$j = ki = -ik$$
$$k = ij = -ji$$

Kvaternion jako rozšíření komplexních čísel

- Kvaternion je lineární kombinací prvků $1, i, j, k$.
- $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$
- Jedna reálná, tři imaginární složky.

Platí vztahy

$$
\begin{aligned}
i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\
i = jk = -kj \\
j = ki = -ik \\
k = ij = -ji
\end{aligned}
$$

Komplexní čísla a rotace ve 2D

Maticový zápis rotace ve 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Zápis pomocí komplexních čísel

$$(x + yi)(\cos\alpha + \sin\alpha i) =$$
$$= (x\cos\alpha - y\sin\alpha) + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)i$$

- Násobením komplexních čísel lze relizovat rotaci.
- 2D rotaci odpovídá jednotkové komplexní číslo $e^{i\alpha}$!

Komplexní čísla a rotace ve 2D

Maticový zápis rotace ve 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Zápis pomocí komplexních čísel

$$(x + yi)(\cos\alpha + \sin\alpha i) =$$
$$= (x\cos\alpha - y\sin\alpha) + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)i$$

- Násobením komplexních čísel lze relizovat rotaci.
- 2D rotaci odpovídá jednotkové komplexní číslo $e^{i\alpha}$!

Komplexní čísla a rotace ve 2D

Maticový zápis rotace ve 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Zápis pomocí komplexních čísel

$$(x + yi)(\cos\alpha + \sin\alpha i) =$$
$$= (x\cos\alpha - y\sin\alpha) + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)i$$

- Násobením komplexních čísel lze relizovat rotaci.
- 2D rotaci odpovídá jednotkové komplexní číslo $e^{i\alpha}$!

Komplexní čísla a rotace ve 2D

Maticový zápis rotace ve 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Zápis pomocí komplexních čísel

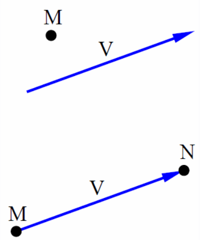
$$(x + yi)(\cos\alpha + \sin\alpha i) =$$
$$= (x\cos\alpha - y\sin\alpha) + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)i$$

- Násobením komplexních čísel lze relizovat rotaci.
- 2D rotaci odpovídá jednotkové komplexní číslo $e^{i\alpha}$!

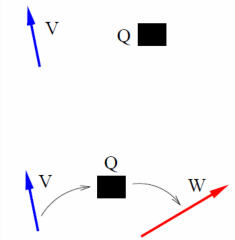
Kvaternion jako skalár a vektor

- $q =< s, v >$
- kde $s = q_0$, $v = [q_1, q_2, q_3]$

Vektor reprezentuje vztah mezi dvěma body



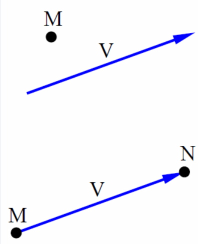
Kvaternion reprezentuje vztah mezi dvěma vektory



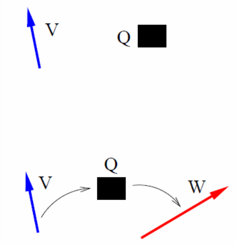
Kvaternion jako skalár a vektor

- $q =< s, v >$
- kde $s = q_0$, $v = [q_1, q_2, q_3]$

Vektor reprezentuje vztah mezi dvěma body



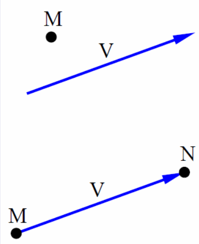
Kvaternion reprezentuje vztah mezi dvěma vektory



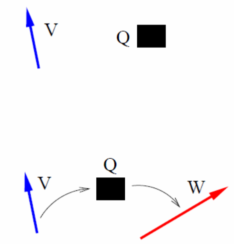
Kvaternion jako skalár a vektor

- $q =< s, v >$
- kde $s = q_0$, $v = [q_1, q_2, q_3]$

Vektor reprezentuje vztah mezi dvěma body



Kvaternion reprezentuje vztah mezi dvěma vektory



Násobení kvaternionů $q_0 q_1$

$q_0 = w_0 + x_0 i + y_0 j + z_0 k,\ q_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$

$$\begin{aligned} q_0 q_1 = (&w_0 w_1 - x_0 x_1 - y_0 y_1 - z_0 z_1)+ \\ (&x_0 w_1 + w_0 x_1 + y_0 z_1 - z_0 y_1)i+ \\ (&y_0 w_1 + w_0 y_1 + z_0 x_1 - x_0 z_1)j+ \\ (&z_0 w_1 + w_0 z_1 + x_0 y_1 - y_0 x_1)k \end{aligned}$$

$q_0 =< s_0, v_0 >,\ q_1 =< s_1, v_1 >$

$$q_0 q_1 = (s_0 s_1 - v_0 v_1, s_0 v_1 + s_1 v_0 + v_0 x v_1)$$

Knihovny

- GLM, Boost.Quaternions a spousta dalších

Násobení kvaternionů $q_0 q_1$

$q_0 = w_0 + x_0 i + y_0 j + z_0 k, \; q_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$

$$
\begin{gathered}
q_0 q_1 = (w_0 w_1 - x_0 x_1 - y_0 y_1 - z_0 z_1) + \\
(x_0 w_1 + w_0 x_1 + y_0 z_1 - z_0 y_1) i + \\
(y_0 w_1 + w_0 y_1 + z_0 x_1 - x_0 z_1) j + \\
(z_0 w_1 + w_0 z_1 + x_0 y_1 - y_0 x_1) k
\end{gathered}
$$

$q_0 =< s_0, v_0 >, \; q_1 =< s_1, v_1 >$

$$
q_0 q_1 = (s_0 s_1 - v_0 v_1, s_0 v_1 + s_1 v_0 + v_0 x v_1)
$$

Knihovny

- GLM, Boost.Quaternions a spousta dalších

Násobení kvaternionů $q_0 q_1$

$q_0 = w_0 + x_0 i + y_0 j + z_0 k, \; q_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$

$$
\begin{aligned}
q_0 q_1 = & (w_0 w_1 - x_0 x_1 - y_0 y_1 - z_0 z_1) + \\
& (x_0 w_1 + w_0 x_1 + y_0 z_1 - z_0 y_1) i + \\
& (y_0 w_1 + w_0 y_1 + z_0 x_1 - x_0 z_1) j + \\
& (z_0 w_1 + w_0 z_1 + x_0 y_1 - y_0 x_1) k
\end{aligned}
$$

$q_0 =< s_0, v_0 >, \; q_1 =< s_1, v_1 >$

$$q_0 q_1 = (s_0 s_1 - v_0 v_1, s_0 v_1 + s_1 v_0 + v_0 x v_1)$$

Knihovny

- GLM, Boost.Quaternions a spousta dalších

Další vlastnosti kvaternionů

Kvaternion sdružený, $q = w + xi + yj + zk$

$q^* = w - xi - yj - zk$
$q^* q = qq^* = 1$

Velikost kvaternionu

$|q| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$

Další vlastnosti kvaternionů

Kvaternion sdružený, $q = w + xi + yj + zk$

$$q^* = w - xi - yj - zk$$
$$q^* q = qq^* = 1$$

Velikost kvaternionu

$$|q| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

3D rotace pomocí kvaternionů

- Libovolnou rotaci lze popsat úhlem α a jednotkovým vektorem $a = (a_0, a_1, a_2)$, který reprezentuje osu otáčení.

Takové rotaci odpovídá kvaternion

$$q = \cos(\alpha/2) + a_0 \sin(\alpha/2)i + a_1 \sin(\alpha/2)j + a_2 \sin(\alpha/2)k$$

Zkráceně

$$q = \cos(\alpha/2) + a \sin(\alpha/2)$$

3D rotace pomocí kvaternionů

- Libovolnou rotaci lze popsat úhlem α a jednotkovým vektorem $a = (a_0, a_1, a_2)$, který reprezentuje osu otáčení.

Takové rotaci odpovídá kvaternion

$$q = \cos(\alpha/2) + a_0 \sin(\alpha/2)i + a_1 \sin(\alpha/2)j + a_2 \sin(\alpha/2)k$$

Zkráceně

$$q = \cos(\alpha/2) + a \sin(\alpha/2)$$

3D rotace pomocí kvaternionů

- Libovolnou rotaci lze popsat úhlem α a jednotkovým vektorem $a = (a_0, a_1, a_2)$, který reprezentuje osu otáčení.

Takové rotaci odpovídá kvaternion

$$q = \cos(\alpha/2) + a_0 \sin(\alpha/2)i + a_1 \sin(\alpha/2)j + a_2 \sin(\alpha/2)k$$

Zkráceně

$$q = \cos(\alpha/2) + a \sin(\alpha/2)$$

3D rotace pomocí kvaternionů, pokr.

Otočení vektoru $v = (v_0, v_1, v_2)$ jednotkovým kvaternionem q odpovídá

$v' = qvq^*$

Pozn.:

- Reálná část kvaternionu, který reprezentuje vektor v, je vždy nulová!
- $v = v_0 i + v_1 j + v_2 k$

`https://quaternions.online/`

3D rotace pomocí kvaternionů, pokr.

Otočení vektoru $v = (v_0, v_1, v_2)$ jednotkovým kvaternionem q odpovídá

$v' = qvq^*$

Pozn.:

- Reálná část kvaternionu, který reprezentuje vektor v, je vždy nulová!
- $v = v_0 i + v_1 j + v_2 k$

https://quaternions.online/

3D rotace pomocí kvaternionů, pokr.

Otočení vektoru $v = (v_0, v_1, v_2)$ jednotkovým kvaternionem q odpovídá

$v' = qvq^*$

Pozn.:

- Reálná část kvaternionu, který reprezentuje vektor v, je vždy nulová!
- $v = v_0 i + v_1 j + v_2 k$

`https://quaternions.online/`

Skládání rotací

- Složení rotací odpovídá násobení kvaternionů!

Rotace kvaternionem q a následně r

$v'' = rv'r^* = rqvq^*r^*$

Skládání rotací

- Složení rotací odpovídá násobení kvaternionů!

Rotace kvaternionem q a následně r

$$v'' = rv'r^* = rqvq^*r^*$$

Porovnání s transformačními maticemi

Skládání transformací - rotační matice

- Operace násobení 27x
- Sčítání/odečítání 18x

Skládání transformací - kvaterniony

- Násobení 16x
- Sčítání/odečítání 12x

Operace rotace - rotační matice

- Násobení 9x
- Sčítání/odečítání 6x

Operace rotace - kvaterniony

- Násobení 21x
- Sčítání/odečítání 18x

Porovnání s transformačními maticemi

Skládání transformací - rotační matice

- Operace násobení $27x$
- Sčítání/odečítání $18x$

Skládání transformací - kvaterniony

- Násobení $16x$
- Sčítání/odečítání $12x$

Operace rotace - rotační matice

- Násobení $9x$
- Sčítání/odečítání $6x$

Operace rotace - kvaterniony

- Násobení $21x$
- Sčítání/odečítání $18x$

Převod mezi kvaterniony a rotačními maticemi

- Nutné zejména z pohledu grafického HW, grafické karty pracují s maticemi!

Kvaternion $q = w + xi + yj + zk \rightarrow$ rotační matice

$$R(q) = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy + 2wz & 2xz - 2wy & 0 \\ 2xy - 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz + 2wz & 0 \\ 2xz + 2wy & 2yz - 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Převod mezi kvaterniony a rotačními maticemi

- Nutné zejména z pohledu grafického HW, grafické karty pracují s maticemi!

Kvaternion $q = w + xi + yj + zk \rightarrow$ rotační matice

$$R(q) = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy+2wz & 2xz-2wy & 0 \\ 2xy-2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz+2wz & 0 \\ 2xz+2wy & 2yz-2wx & 1-2x^2-2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Další použití

- Arcball interface...
  - `https://pixeladventuresweb.wordpress.com/2016/10/04/arcball-controller/`