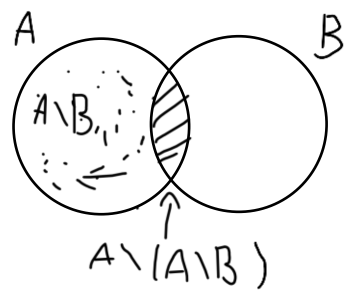
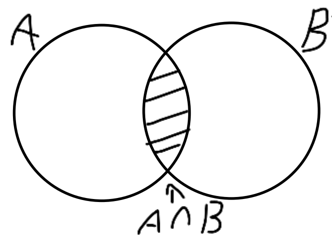
Dôkazy

- **Priamy dôkaz**
  - **Dôkaz rovnosti množín**
    - $(\forall A, B:) \qquad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
    - **Vennove diagramy:**
      - **ĽS:**
        - 

      - **PS:**
        - 

    - **Dôkaz:**
      - **1. časť:**
        - $A \setminus (A \setminus B) \subseteq A \cap B$
        - $x \in A \setminus (A \setminus B) \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \in A \cap B$
        - $x \in A \setminus (A \setminus B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Rightarrow$
        - $\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$
      - **2. časť:**
        - $A \cap B \subseteq A \setminus (A \setminus B)$
        - $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow$
        - $\Rightarrow (Umělý\ krok)(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge x \notin A) \vee (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge x \in B) \Rightarrow$
        - $\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \setminus B \Rightarrow x \in A \setminus (A \setminus B)$

  - **Dôkaz implikácie:**
    - $A \Rightarrow B$
    - $A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \ldots \Rightarrow B_n = B$
    - **Príklad:**
      - Dokážte že súčet 2 lichých čísel je sudé číslo
      - **Implikácia:** Ak m, n sú liché, tak m+n je sudé
      - $\exists k, l \in \mathbb{Z}: m = 2k + 1 \wedge n = 2l + 1 \Rightarrow m + n = 2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1) = 2(q); q \in \mathbb{Z}$

- **Príklad 2:**
  - **Implikácia:** Ak m je liché tak m^2 je tiež liché
  - $\exists k \in \mathbb{Z}: m = 2k + 1 \Longrightarrow m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(k^2 + 2k) + 1 = 2(l) + 1; l \in \mathbb{Z}$

- **Nepriamy dôkaz implikácie**
  - $(\boldsymbol{A} \Longrightarrow \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow (\neg \boldsymbol{B} \Longrightarrow \neg \boldsymbol{A})$
  - Príklad:
    - Ak platia všetky predpoklady, tak platí záver
    - Obmenená veta: Ak neplatí záver tak neplatí aspoň jeden predpoklad

  - Príklad 2:
    - $\forall n \in \mathbb{N}: 2 \nmid n^2 \Longrightarrow 2 \nmid n$
    - Obmena: $\forall n \in \mathbb{N}: 2|n \Longrightarrow 2|n^2$
    - $\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k \Longrightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ (sudé číslo)

  - Príklad 3:
    - (Ak p je prvočíslo $\wedge\, p > 2) \Longrightarrow 2 \nmid p$
    - Obmena: $2|p \Longrightarrow (p \leq 2 \vee p\ nie\ je\ prvočíslo)$
    - $\exists k \in \mathbb{N}: p = 2k$
      - Ak $k = 1, p = 2$ Platí
      - Ak $k > 1, p = 2k$ $2|p, k|p, p|p, 1|p$ (p je zložené číslo)

- **Dôkaz sporom**
  - Príklad:
    - Prvočísel je nekonečne veľa
    - Spor: Prvočísel nie je nekonečne veľa
    - $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\ p_n\}$ $|P| = n$
    - $s = p_1 * p_2 * p_3 \dots p_n + 1$
    - Podmínka1: $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}: p_i \nmid s$
    - Podmínka2: $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}: p_i < s$
    - s môže byť:
      - **Prvočíslo** - $s \notin P$ – **Spor**
      - **Zložené číslo** – nedokážeme rozložiť na prvočísla ktoré sú v P kvôli podmienke2, **Spor**

  - Príklad 2:
    - $\sqrt{5}$ nie je racionálne číslo (Q)
    - Spor: $\sqrt{5}$ je racionálne číslo (Q)
    - $\exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, NSD(p,q) = 1; \frac{p}{q} = \sqrt{5}$
    - $\Longrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 5 \Longrightarrow p^2 = 5q^2 \Longrightarrow 5|p^2 \Longrightarrow 5|p$
    - $\exists k \in \mathbb{Z}: p = 5k$
    - $(5k)^2 = 5q^2 \Longrightarrow 25k^2 = 5q^2 \Longrightarrow 5k^2 = q^2 \Longrightarrow 5|q^2 \Longrightarrow 5|q$
    - $NSD(p,q) =$ aspoň 5 – **Spor**

- **Dôkaz matematickou indukciou**
  - Dve kroky
  - Príklad:
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}(n + 1) * n$
    - Krok 1:
      - $n = 1$
      - $L = 1$
      - $P = \frac{1}{2}(1 + 1) * 1 = \frac{1}{2} * 2 = 1$
      - $L = P$
    - Krok 2:
      - $1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}(k + 1)k$ - **Indukčný predpoklad**
      - $1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 2) * (k + 1)$
      - $\boldsymbol{L} = 1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)k + (k + 1) = (k + 1)\left(\frac{1}{2}k + 1\right) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2) = \boldsymbol{P}$