

Návrh číslicových systémů (INC)

Jiří Matoušek, Otto Fučík

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta informačních technologií
Božetěchova 2, 612 66 Brno



Použitá literatura

- N. Frištacký, M. Kolesár, J. Kolenička a J. Hlavatý: „Logické systémy“, SNTL Praha, 1986
M. Eysselt: „Logické systémy“, SNTL Praha, skriptum VUT v Brně, 1985
J. F. Wakerly: „Digital Design. Principles and Practices“, Prentice Hall, ISBN 0-13-769191-2, 2000
V. P. Nelson, H.T.Nagle, B.D.Carroll, J.D.Irwin: „Digital Logic Circuit Analysis & Design“, ISBN 0-13-463894-8, 1995
T.L.Floyd: „Digital Fundamentals“, Prentice Hall, ISBN 0-13-080850-4, 2000

Booleova algebra, minimalizace

- **Booleova algebra**
 - axiomy
 - teoremy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
 - Karnaughova mapa
 - metoda Quine-McCluskey

1. Distributivní komplementární svaz

- Obsahuje alespoň dva prvky

2. Šestice $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$

- B neprázdná množina s alespoň dvěma různými prvky
- $+$ logický součet (binární operace)
- $\cdot$ logický součin (binární operace)
- $'$ komplement (unární operace)
- 0 nejmenší (nulový) prvek (infimum)
- 1 největší (jedničkový) prvek (supremum)
- Definuje množinu prvků, množinu operátorů, axiomy (postuláty) a teoremy (věty)
- Dvuhodnotová Booleova algebra
 - Axiomy a teoremy Booleovy algebry (1854) jsou definovány obecně
 - My se omezíme na algebru, ve které logické proměnné a výsledky logických funkcí mohou nabývat pouze hodnot 0 a 1 ($0 \neq 1$)

- Pokud platí nějaké tvrzení, tak platí i duální tvrzení, které vznikne vzájemnou záměnou operací „+“ a „·“ a prvků 0 a 1

$$0 \rightarrow 1 \quad 1 \rightarrow 0 \quad "+" \rightarrow "." \quad "." \rightarrow "+"$$

- Příklad:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Poznámka

- Pokud platí jisté tvrzení, není třeba dokazovat platnost duálního tvrzení

- Booleova algebra
 - axiomy
 - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
 - Karnaughova mapa
 - metoda Quine-McCluskey

- Uzavřenost (výsledky log. operací patří do množiny B)

$$(a + b) \in B \quad (\text{I a}) \quad (a \cdot b) \in B \quad (\text{I b})$$

- Neutralita prvků 0 a 1 (identita)

$$a + 0 = a \quad (\text{II a}) \quad a \cdot 1 = a \quad (\text{II b})$$

- Zákony komutativní (komutativita)

$$a + b = b + a \quad (\text{III a}) \quad a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{III b})$$

- Zákony distributivní (distributivita)

$$\begin{array}{ccc} & (\text{IV a}) & (\text{IV b}) \\ a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c) & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \end{array}$$

- Existence komplementu (komplementárnost)

$$a \cdot a' = 0 \quad (\text{V a}) \quad a + a' = 1 \quad (\text{V b})$$

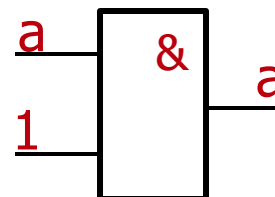
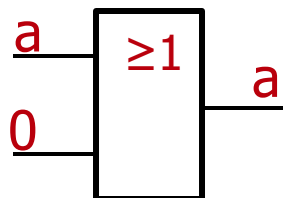
- V množině B existují alespoň dva různé prvky (VI)

- Neutralita prvků 0 a 1

$$a + 0 = a \quad (\text{II a})$$

$$a \cdot 1 = a \quad (\text{II b})$$

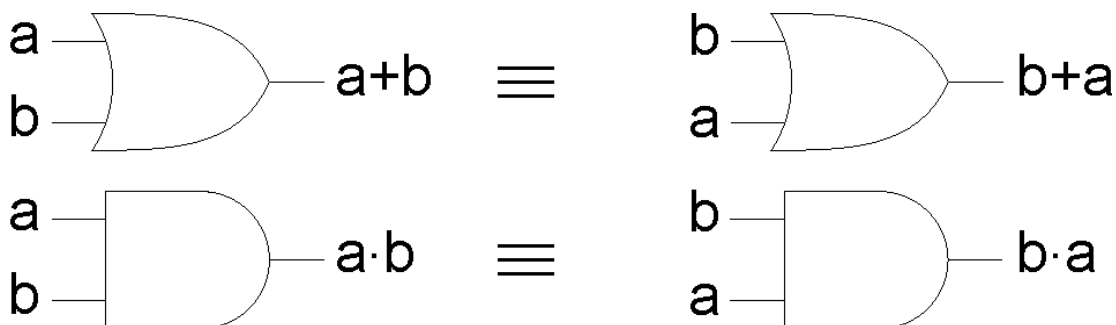
- Z hlediska případné realizace logických obvodů z log. členů tento axiom říká, že přičtení log. nuly, resp. vynásobení log. jedničkou, nezmění hodnotu proměnné
- Uvedenou operaci tedy není třeba realizovat, a můžeme tak ušetřit příslušné log. členy



- Zákony komutativní

$$a + b = b + a \quad (\text{III a}) \qquad a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{III b})$$

- V případě realizace log. obvodů z log. členů AND a OR je jedno, na který ze vstupů přivedeme příslušnou log. proměnnou – jsou symetrické
- Máme tedy volnost při volbě vstupů příslušných log. členů, čehož se s výhodou využívá při implementaci log. obvodů, např. v integrovaných obvodech, na deskách s plošnými spoji apod.

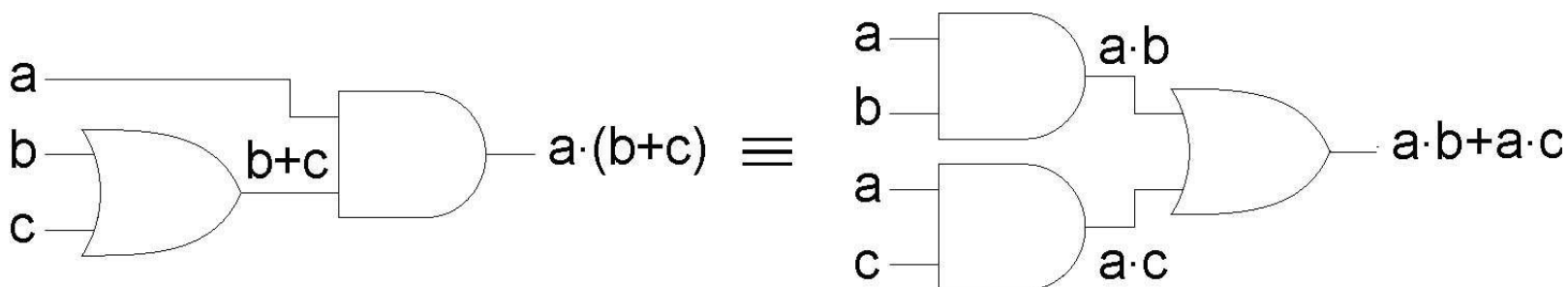


- Zákony distributivní

$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c) \quad (\text{IV a})$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{IV b})$$

- Výrazy lze zjednodušovat eliminací společné proměnné
- Vidíme, že aplikací distributivního zákona můžeme ušetřit jeden log. člen AND se dvěma vstupy (1/3 log. členů) a dva vodiče (2/7 všech vodičů)



- Booleova algebra
 - axiomy
 - **teorémy**
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
 - Karnaughova mapa
 - metoda Quine-McCluskey

- Teorémy
 - Jsou odvozeny na základě axiomů Booleovy algebry a definují další užitečné vlastnosti
- Důkazy lze provést
 - Systematickou aplikací axiomů a již dříve dokázaných teorémů
 - Pomocí Vennových diagramů, atd.
- Příklad
 - Důkazu distributivního zákona pomocí úplné indukce

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Použitím úplné indukce
 - Postupně vyčísľujeme hodnoty výrazů pro všechny možné kombinace hodnot vstupních proměnných; pokud se vždy dosáhne správného výsledku, je dokázáno, že daný výraz platí

a	b	c	(b+c)	a·b	a·c	a·(b+c)	a·b+a·c
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

- Jedinečnost 0 a 1

- Prvek 0 je v axiomu $a + 0 = a$ (II a) jedinečný (VII a)

- Prvek 1 je v axiomu $a \cdot 1 = a$ (II b) jedinečný (VII b)

- Idempotence

$$a + a = a \quad (\text{VIII a})$$

$$a \cdot a = a \quad (\text{VIII b})$$

- Agresivita 1 a 0

$$a + 1 = 1 \quad (\text{IX a})$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad (\text{IX b})$$

- Absorpce

$$a + a \cdot b = a \quad (\text{X a})$$

$$a \cdot (a + b) = a \quad (\text{X b})$$

- Existence jediného komplementu: a' je plně určen a (XI)

- De Morganovy zákony

$$(a + b)' = a' \cdot b' \quad (\text{XII a})$$

$$(a \cdot b)' = a' + b' \quad (\text{XII b})$$

- Zákony asociativní (asociativita)

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{XIII a})$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{XIII b})$$

- Idempotence

$$a + a = a \quad (\text{VIII a})$$

$$a \cdot a = a \quad (\text{VIII b})$$

- Důkaz

- Postupnou aplikací dříve uvedených zákonů

$$\begin{aligned} a + a &= (a + a) \cdot 1 \\ &= (a + a) \cdot (a + \bar{a}) \end{aligned}$$

$$= a + a \cdot \bar{a}$$

$$= a + 0$$

$$= a$$

- Význam

- Zjednodušením výrazu lze ušetřit příslušný logický člen

- Agresivita 0 a 1

$$a + 1 = 1 \quad (\text{IX a})$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad (\text{IX b})$$

- Důkaz

$$\begin{aligned} a + 1 &= (a + 1) \cdot 1 \\ &= (a + 1) \cdot (a + \bar{a}) \\ &= a + 1 \cdot \bar{a} \\ &= a + \bar{a} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Význam

- Eliminace zbytečných členů

- Absorpce

$$a + a \cdot b = a \quad (\text{X } a)$$

$$a \cdot (a + b) = a \quad (\text{X } b)$$

- Důkaz

$$a + a \cdot b = a \cdot 1 + a \cdot b$$

$$= a \cdot (1 + b)$$

$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

- Význam

- Eliminace přebytečné proměnné ve výrazu

- Existence jediného komplementu (XI)

- Důkaz

- Předpokládejme, že dva prvky $x, y \in B$ mají vlastnost komplementu prvku a , tedy:

- Platí (existence komplementu):

$$x = 1 \cdot x$$

$$a \cdot x = 0 \quad a + x = 1$$

$$x = (a + y) \cdot x$$

$$a \cdot y = 0 \quad a + y = 1$$

$$x = (a \cdot x) + (y \cdot x)$$

- Platí (idempotence):

$$x = 0 + (y \cdot x)$$

$$a \cdot a = a$$

$$x = y \cdot x$$

- Platí tedy, že $x = y$, což je v rozporu s předpokladem

- De Morganovy zákony

$$a + b = (a' \cdot b')' \quad (\text{XII a}) \qquad a \cdot b = (a' + b')' \quad (\text{XII b})$$

$$(a + b)' = a' \cdot b' \qquad (a \cdot b)' = a' + b'$$

- Zobecnění pro více proměnných

$$(a + b + c + \dots)' = a' \cdot b' \cdot c' \dots \qquad (a \cdot b \cdot c \dots)' = a' + b' + c' + \dots$$

- Důkaz (úplnou indukcí)

a	b	a+b	not(a+b)	not(a)	not(b)	not(a).not(b)
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

- Využití

- Negace součtu lze nahradit součinem negací, resp. negace součinu součtem negací

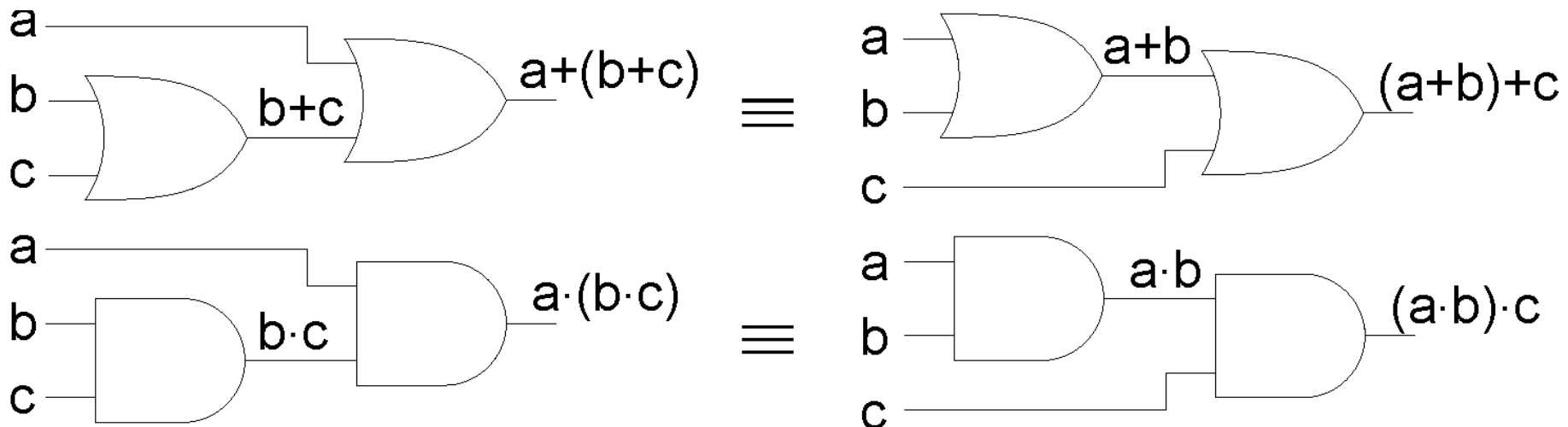
- Zákony asociativní

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{XIII a})$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{XIII b})$$

- Využití

- Nezáleží na pořadí vyčíslování operací log. součtu a součinu
- Realizace log. operací i více proměnných než dvou může být provedena pouze s log. členy se dvěma vstupy



- Involuce (dvojitá negace)

$$\overline{\overline{a}} = a$$

- Důkaz

- Pomocí úplné indukce

$$\overline{\overline{1}} = \overline{0} = 1$$

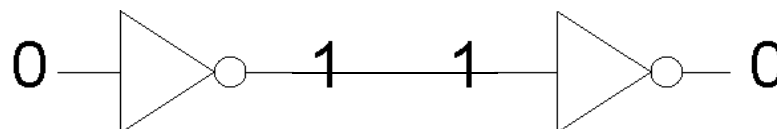
$$a = 1$$

$$\overline{\overline{0}} = \overline{1} = 0$$

$$a = 0$$

- Využití

- Není třeba dávat dva invertory za sebe



- Absorpce negace

$$a + a' \cdot b = a + b \qquad a \cdot (a' + b) = a \cdot b$$

- Důkaz

$$\begin{aligned} a + a' \cdot b &= (a + a') \cdot (a + b) \\ &= 1 \cdot (a + b) \\ &= a + b \end{aligned}$$

- Využití

- Možnost eliminace přebytečného komplementu proměnné ve výrazu

- Sousednost (spojování, adjacency)

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a \quad (a + b) \cdot (a + \bar{b}) = a$$

- Důkaz

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a \cdot (b + \bar{b})$$

$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

- Význam

- Lze eliminovat přebytečné proměnné vyskytující se jak v přímé, tak komplementární formě ve výrazu
- Uplatňuje se v řadě tzv. minimalizačních technik (např. Karnaughova mapa, metoda Quine-McCluskey atd.) vypracovaných pro systematické zjednodušování logických výrazů

- Booleova algebra
 - axiomy
 - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
 - Karnaughova mapa
 - metoda Quine-McCluskey

- Úplná normální disjunktční forma (UNDF)
 - Suma součinů
(anglicky Sum Of Products – SOP)
 - Sepisujeme kombinace vstupních proměnných, ve kterých fce nabývá hodnoty log. 1
(proměnné zapisujeme přímo)
 - Termům říkáme implikanty (mintermy)
- Částečně minimalizovaná ÚNDF
 - Zkrácená normální disjunktční forma (ZNDF)
- Minimální možné řešení
 - Minimální normální disjunktční forma (MNDF)

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Term = uspořádaná skupina proměnných a operátorů

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) &= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot \bar{z} \\
 &= \bar{x} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{z} \\
 &= \bar{z}
 \end{aligned}$$

- Úplná normální konjunktivní forma (UNKF)

- Součin sum
(anglicky Product Of Sums – POS)
- Sepisujeme kombinace vstupních proměnných, ve kterých fce nabývá hodnoty log. 0
(proměnné zapisujeme komplementárně)
- Termům zde říkáme implikenty
(maxtermy)

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

- Částečně minimalizovaná

- Zkrácená normální konjunktivní forma (ZNKF)

- Minimální řešení

- Minimální normální konjunktivní forma (MNKF)

$$F(x, y, z)$$

$$= (x + y + \bar{z}) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

$$= (x + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{z})$$

$$= \bar{z}$$

- Nezkrácená ÚNDF

$$F(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot \bar{z}$$

- Varianty zkráceného zápisu ÚNDF

$$F(x, y, z) = \vee(0, 2, 4, 6) = 1(0, 2, 4, 6) = \Sigma m(0, 2, 4, 6)$$

- V závorce jsou uvedeny stavové indexy, pro které nabývá funkce hodnoty log. 1
- Před závorkou máme označení disjunktivní formy pomocí operátoru log. součtu či sumy implikantů (m jako minterm)

- Nezkrácená ÚNKF

$$F(x, y, z) = (x + y + \bar{z}) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

- Varianty zkráceného zápisu ÚNKF

$$F(x, y, z) = \wedge(1, 3, 5, 7) = \&(1, 3, 5, 7) = \Pi M(1, 3, 5, 7)$$

- V závorce jsou uvedeny stavové indexy, pro které nabývá funkce hodnoty log. 0
- Před závorkou máme označení konjunktivní formy pomocí operátoru log. součinu či součinu implikentů (M jako Maxterm).

- Pokud log. funkce nabývá pro nějakou kombinaci vstupních proměnných neurčené hodnoty X , pak ji můžeme interpretovat jako hodnotu log. 1 či log. 0
 - Toho lze z výhodou využít při minimalizaci funkce
- Příklad možného zkrácení ÚNDF zápisu neúplně definované funkce

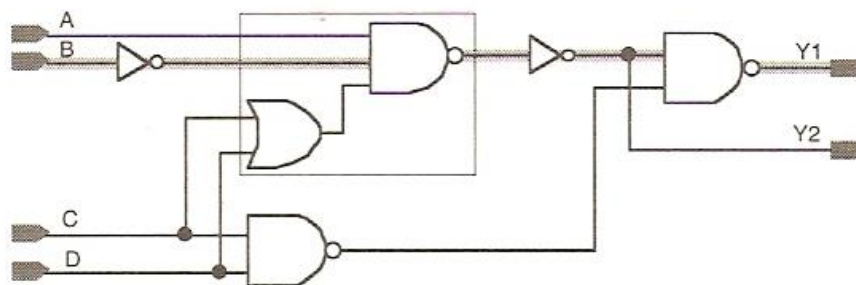
$$\begin{aligned} F(w, x, y, z) &= \vee(2, 3, 4, 6, 8, 9, 13) + x(7, 12) \\ &= 1(2, 3, 4, 6, 8, 9, 13) + x(7, 12) \\ &= \Sigma m((2, 3, 4, 6, 8, 9, 13) + x(7, 12)) \end{aligned}$$

s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

- Booleova algebra
 - axiomy
 - teoremy
- Normální formy logické funkce
- **Optimalizace logických obvodů - minimalizace**
 - Karnaughova mapa
 - metoda Quine-McCluskey

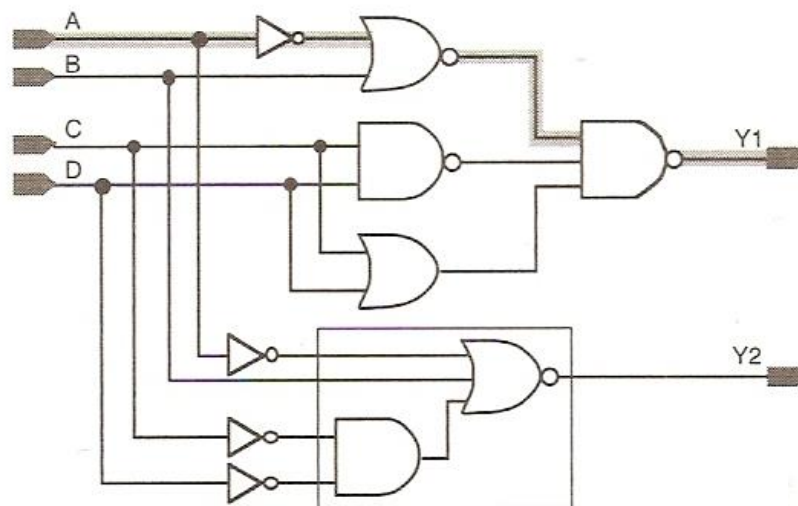
- Plocha (area)
 - Část čipu, kterou obvod zabírá
 - Je ovlivněna řadou parametrů - počet log. členů (viz minimalizace), rozměry log. členů (technologie výroby, logický zisk), spoje
- Časování (timing)
 - Doba, za kterou se po změně vstupních proměnných ustálí výstupní proměnné obvodu
 - Je ovlivněno řadou parametrů - délka logické větve, logický zisk a zátěž log. členů, parazitní kapacity, délka spojů atd.
- Příkon (power)
 - Příkon obvodu ovlivňuje počet log. členů, pracovní frekvence, velikost napájecího napětí, parazitní kapacity, výrobní proces atd.
- Testovatelnost (test, scan)
 - Logické obvody je třeba navrhovat tak, aby bylo možno otestovat jejich správnou činnost

- Minimální plocha
 - Počet log. členů: 6
 - Plocha: 12 (skutečné rozměry na čipu)
 - Zpoždění: $4 t_d$



A	B	C	D	Y1	Y2
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0

- Minimální zpoždění
 - Počet log. členů: 10
 - Plocha: 28 (skutečné rozměry na čipu)
 - Zpoždění: $3 t_d$



- V rámci této přednášky se budeme zabývat především minimalizací počtu logických členů potřebných pro realizaci dané funkce
- Minimalizační metody
 - Algebraické
 - Postupnou aplikací axiomů a teorémů Booleovy algebry
 - Grafické
 - Jednotková krychle
 - Vennův diagram
 - Mapy (Svobodova, Karnaughova)
 - Algoritmické
 - Quine-McCluskey
 - Espresso atd.

- Příklad

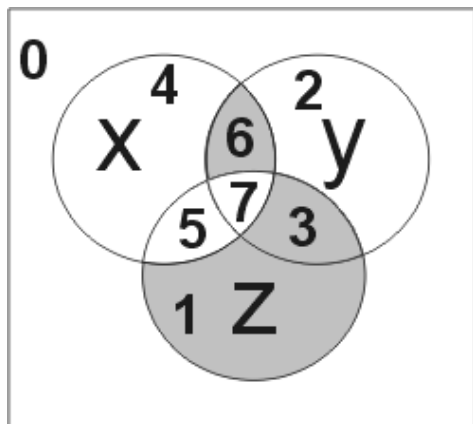
- Funkce $F(x,y,z)$ je definována pravdivostní tabulkou

s	x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

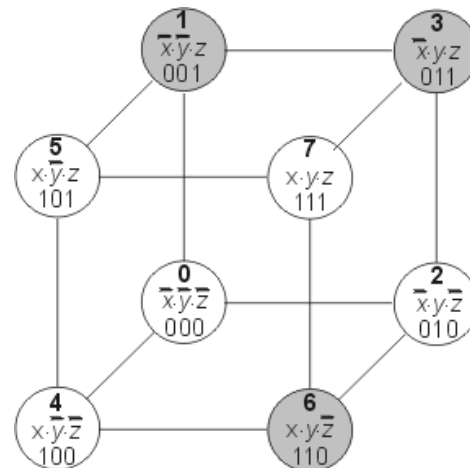
- Minimalizace funkce algebraicky

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} \\ &= \bar{x} \cdot z \cdot (y + \bar{y}) + x \cdot y \cdot \bar{z} \\ &= \bar{x} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

- Vennův diagram



- Jednotková krychle



- Zvýrazněny jsou stavy, ve kterých jsou pravdivostní hodnoty funkce $F(x,y,z)$ rovny log. 1 (tedy stavy 1, 3 a 6)
- Stavy 1-3 se liší v jedné proměnné
 - Lze tedy eliminovat proměnnou, jejíž váha je rovna rozdílu hodnot příslušných stavů
 - $3 - 1 = 2$, což odpovídá váze proměnné, kterou můžeme eliminovat (proměnná y)

- Reprezentace log. funkce maticově
- Marquandova (Svobodova) mapa
 - Při otočení přiřazení proměnných o 180° kolem středu mapy získáme přiřazení inverzní
- Karnaughova mapa
 - Sousedním políčkům jsou přiřazeny sousedné kombinace vstupních stavů (liší se v jedné proměnné)
- Pozn.: mapy mohou být různě pootočený
- Příklady

		<u>z</u>	
		0	1
y	0	0	1
	1	2	3

		<u>z</u>			
		00	01	11	10
x	0	0	1	3	2
	1	4	5	7	6

- Booleova algebra
 - axiomy
 - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
 - Karnaughova mapa
 - metoda Quine-McCluskey

- Platí
 - V buňkách pod pruhem má daná proměnná hodnotu log. 1
 - V buňkách mimo pruh má daná proměnná hodnotu log. 0
 - Existuje řada možných nákresů K mapy (umístění proměnných...)
 - Buňky si též můžeme označit binárním kódem odpovídajícím jednotlivým kombinacím vstupních proměnných
 - Důležité je dodržet pravidlo, že se sousední buňky liší v jedné proměnné

• Příklad

- Mapa pro 4 proměnné

		z				
		00	01	11	10	
w	00	0	1	3	2	x
	01	4	5	7	6	
	11	12	13	15	14	
	10	8	9	11	10	
		y				

- Funkce $F(x,y,z)$

s	x	y	z	$F(x,y,z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

		z			
		00	01	11	10
x \ y	0	0	1	3	2
	1	4	5	7	6
		0	0	0	1

$$F(x, y, z) = \bar{x} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z}$$

- Postup minimalizace

- Hledáme sousední buňky, ve kterých nabývá funkce hodnotu log. 1
- Sdružením těchto buněk eliminujeme proměnnou, jejíž hodnota se v těchto buňkách mění – y
 - Dvojice 1-3 leží pod pruhem proměnné z a mimo pruh x (= komplement x) – kombinace odpovídající stavovému indexu 6 zůstává nezměněna

- Sdružíme-li buňky 0-4 a 2-6
 - Eliminujeme proměnnou x

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

		z			
		00	01	11	10
x	0	0 1	1 0	3 0	2 1
	1	4 1	5 0	7 0	6 1
		y			

$$F(x, y, z) = \bar{y} \cdot \bar{z} + y \cdot \bar{z}$$

- Sdružíme-li buňky 0-2 a 4-6
 - Eliminujeme proměnnou y

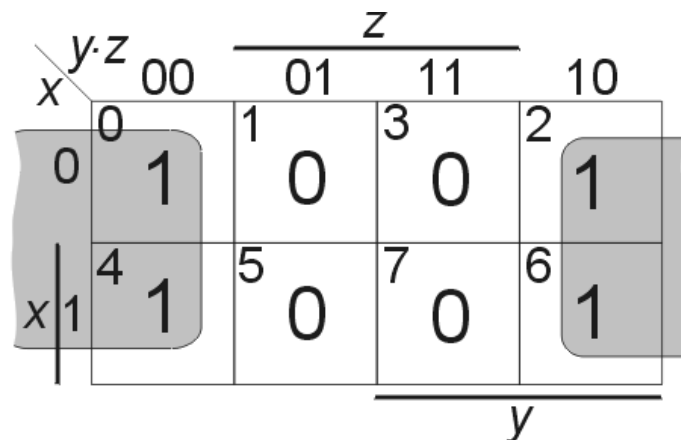
s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

		z			
		00	01	11	10
$x \backslash y$	0	0 1	1 0	3 0	2 1
	1	4 1	5 0	7 0	6 1
		y			

$$F(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{z}$$

- Sdružíme-li buňky 0-2-4-6
 - Eliminujeme proměnné x a y

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0



$$F(x, y, z) = \bar{z}$$

- Karnaughova mapa
 - Tvoří se obdobně jako v případě disjunkttní formy s tím rozdílem, že se v mapě se sdružují log. 0 a ne log. 1
 - Proměnné se negují a výsledek se zapisuje v konjunktní formě

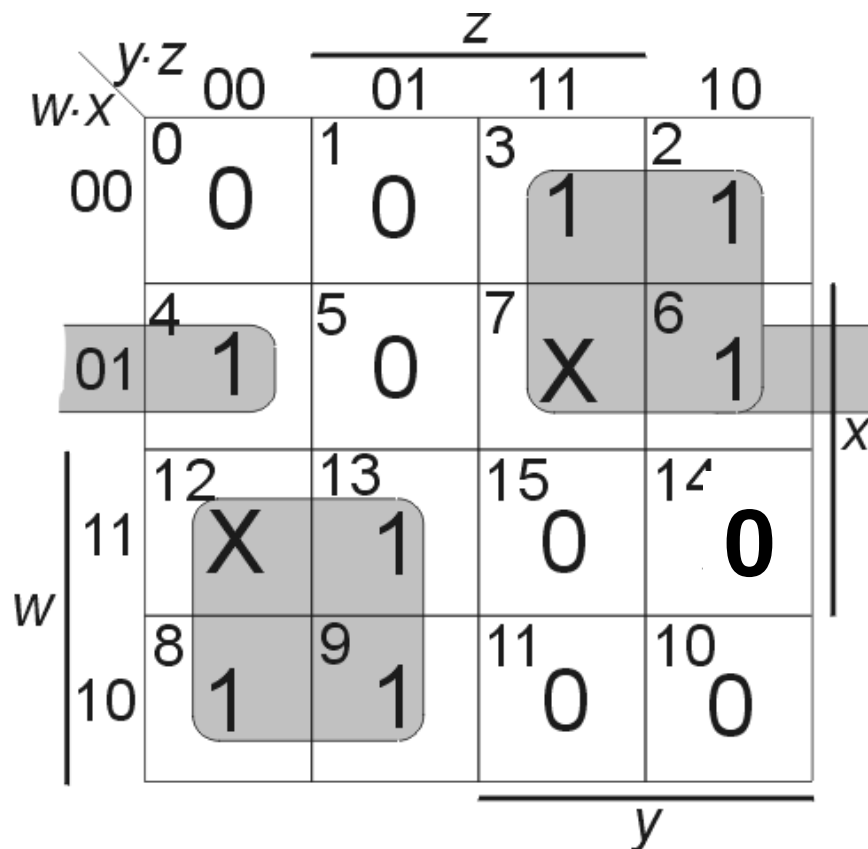
$$F(x, y, z) = \&(1,3,5,7)$$

		z					
		$y \cdot z$	00	01	11	10	
x	0	0	1	0	0	2	1
	1 <td>4</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>6</td> <td>1</td>	4	1	0	0	6	1

y

- Příklad
 - $F(x,y,z) = \text{not}(z)$

- Karnaughova mapa



$$F(w, x, y, z) = \bar{w} \cdot y + w \cdot \bar{y} + \bar{w} \cdot x \cdot \bar{z}$$

s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

• ÚNKF

$$\begin{aligned}
 F(w, x, y, z) &= \wedge(0,1,5,10,11,15) \cdot X(7,12,14) \\
 &= \&(0,1,5,10,11,15) \cdot X(7,12,14) \\
 &= \Pi M(0,1,5,10,11,15) \cdot X(7,12,14)
 \end{aligned}$$

		z			
		00	01	11	10
w \ x	00	0	0	1	1
	01	1	0	X	1
w	11	X	1	0	X
	10	1	1	0	0

y

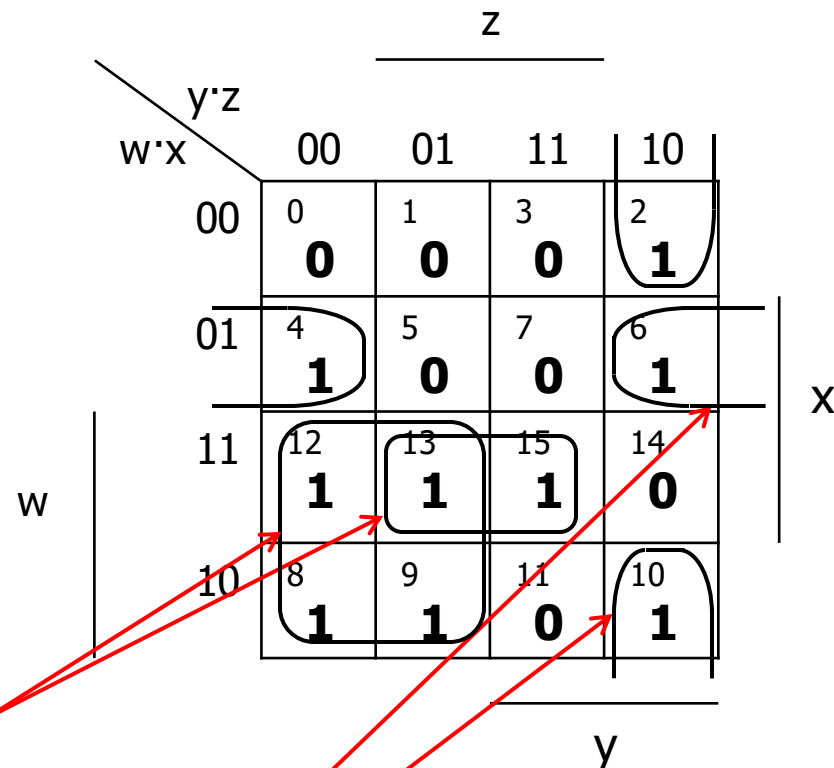
s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	x
15	1	1	1	1	0

- Úplný implikant – term ÚNDF, který obsahuje všechny proměnné
- Pokrácený (částečně zkrácený) implikant, který má některé sousedné proměnné eliminované
- Zkrácený implikant – má všechny sousedné proměnné eliminované; po odstranění jakékoliv další proměnné přestává být implikantem; obvod sestavený ze zkrácených implikantů nemá hazardy

		z				
		00	01	11	10	
y\w	00	0 0	1 0	3 0	2 1	
	01	4 1	5 0	7 0	6 1	x
	11	12 1	13 1	15 1	14 0	
	10	8 1	9 1	11 0	10 1	
		y				

- Tvrzení platí duálně
 - Když zaměníme implikant pro ÚNDF za implicit pro ÚNKF

- Množina minimálních implikantů obsahuje zkrácené implikanty
- Minimální řešení funkce – jedna nebo více podmnožin množiny minimálních implikantů; může existovat více ekvivalentních řešení z nichž volíme dle dalších kritérií (viz např. obvody s více výstupy probírané dále)
- Nesporný implikant – implikant, který bude vždy součástí minimálního řešení
- Volitelný implikant – zkrácený implikant, který může, ale nemusí být součástí min. řešení, pokud lze použít jiný zkrácený implikant



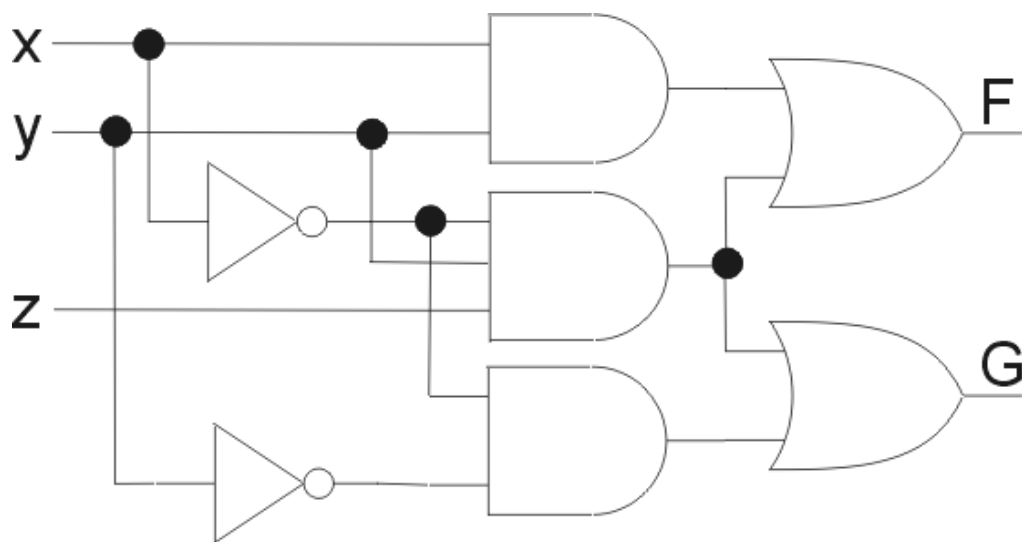
- Popis
 - Minimální pokrytí vrcholů více funkcí současně
 - Vede na log. členy sdílené více funkcemi
 - Sdílené log. členy nemusí představovat minimální možné řešení
 - V rozsáhlých obvodech může výrazně redukovat počet log. členů
 - Vzhledem k potenciálně značnému množství řešení (NP-úplný problém) je třeba často použít heuristických metod
- Příklad nalezení min. řešení nezávislých funkcí:
 - $F(x,y,z) = \sum m(3,6,7)$ a $G(x,y,z) = \sum m(0,1,3)$
 - Celkem 8 log. členů

		z				
		y·z	00	01	11	10
x	0	0	0	1	0	3
	1	4	0	5	0	7

		<u>z</u>				
		y·z	00	01	11	10
x	0	0	1	3	2	0
	1	4	5	7	6	0

- Příklad nalezení min. řešení dvou funkcí se sdílenými log. členy:

- $F(x,y,z) = \sum m(3,6,7)$
- $G(x,y,z) = \sum m(0,1,3)$
- Ušetřili jsme jeden log. člen



		z			
x \ y·z		00	01	11	10
0	0	0	3	1	2
1	4	0	5	7	6

		z			
x \ y·z		00	01	11	10
0	0	1	1	3	2
1	4	0	5	7	6

- Booleova algebra
 - axiomy
 - teoremy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
 - Karnaughova mapa
 - metoda Quine-McCluskey

- Tabulární metoda
 - Vhodná i pro funkce více než 5-6 proměnných, kde Karnaughovy mapy selhávají, a pro minimalizace obvodů s více výstupy
- Postup pro ÚNDF (SOP)
- Krok 1
 - Seřad' do řádků tabulky jednotlivé implikanty v pořadí dle počtu jedniček jejich binárních vah - skupiny sousedných implikantů
- Krok 2
 - Sepiš do skupin všechny sousedné implikanty mezi jednotlivými skupinami v tabulce – eliminovanou proměnnou označ pomlčkou
 - Opakuj krok 2 pro skupiny vytvořené v kroku 2 tam, kde existuje další sousednost
 - Pokud některý implikant nemá další sousedné termy, říkáme mu zkrácený implikant
 - Hledej minimální řešení pokrytí dané funkce (např. pomocí mřížky implikantů)

- Příklad funkce $F(w,x,y,z)=1(2,4,6,8,9,10,12,13,15)$
 - Krok 1

Implikant	w.x.y.z	Skupina jedniček
2	0010	Skupina 1
4	0100	
8	1000	
6	0110	Skupina 2
9	1001	
10	1010	
12	1100	
13	1101	Skupina 3
15	1111	Skupina 4

- Krok 1

Zkrácené implikanty	w.x.y.z	Pokrytí
2	0010	✓
4	0100	✓
8	1000	✓
6	0110	✓
9	1001	✓
10	1010	✓
12	1100	✓
13	1101	✓
15	1111	✓

- Do řádků tabulky zapisujeme jednotlivé implikanty v pořadí dle jejich vah a počtu jedniček jejich binárních vah
- Tímto dostáváme skupiny sousedných implikantů
- Označujeme implikanty pokryté zkrácenými implikanty, viz krok 2

- Krok 2

Zkrácené implikanty	w.x.y.z	Pokrytí
2,6	0-10	PI2
2,10	-010	PI3
4,6	01-0	PI4
4,12	-100	PI5
8,9	100-	✓
8,10	10-0	PI6
8,12	1-00	✓
9,13	1-01	✓
12,13	110-	✓
13,15	11-1	PI7

- Hledáme a sepisujeme do skupin všechny sousedné implikanty
- V tabulce označíme eliminovanou proměnnou pomlčkou

- Krok 2 – druhá iterace

Zkrácené implikanty	w.x.y.z	Pokrytí
8,9,12,13	1-0-	PI1

- Opakujeme krok 2 pro skupiny vytvořené v předchozí iteraci kroku 2 tam, kde existuje další sousednost
- Pokud některý implikant nemá další sousedné termy, říkáme mu zkrácený implikant a označujeme ho PI
- Implikanty, které jsou pokryty jinými, označujeme ✓
- Končíme v okamžiku, kdy jsou všechny implikanty pokryty alespoň jednou
- Výsledek
 - Máme celkem 7 zkrácených implikantů $PI1=(8,9,12,13)$, $PI2=(2,6)$, $PI3=(2,10)$, $PI4=(4,6)$, $PI5=(4,12)$, $PI6=(8,10)$, a $PI7=(13,15)$
 - Číslem je označen vrchol funkce, který je daným zkráceným implikantem pokryt

- Grafické znázornění pokrytí vrcholů funkce
 - Zkrácené implikanty $PI1=(8,9,12,13)$, $PI2=(2,6)$, $PI3=(2,10)$, $PI4=(4,6)$, $PI5=(4,12)$, $PI6=(8,10)$, a $PI7=(13,15)$
 - Hledáme nejmenší počet zkrácených implikantů pokrývajících všechny vrcholy
 - Může existovat více řešení

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				x	x		x	x	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	x

- Nejprve musíme zahrnout nesporné implikanty
 - Vrchol 15 je pokryt pouze zkráceným implikantem PI7 (plný kroužek), podobně vrchol 9 je pokryt PI1
 - Zkráceným implikantem PI1 jsou též pokryty vrcholy 8, 12 a 13, zkráceným implikantem PI7 je též pokryt vrchol 13
 - Zbývají vrcholy 2,4,6 a 10, které lze pokrýt různým způsobem

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				⊗	⊗		⊗	⊗	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								⊗	⊗

- Dále hledáme nejmenší pokrytí zbývajících vrcholů 2, 4, 6, a 10
 - Zkrácený implikant PI5 nepředstavuje dobrou volbu, neboť mu zbývá pokrýt pouze vrchol 4
 - Podobně, zkrácenému implikantu PI6 zbývá pokrýt pouze vrchol 10

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				(X)	(X)		(X)	(X)	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	(X)

- Nejlepší řešení

- Představují PI3 a PI4 $F(w, x, y, z) = PI1 + PI3 + PI4 + PI7$
- Vyžaduje nejmenší počet $= (1 - 0 -) + (-010) + (01 - 0) + (11 - 1)$ implikantů
- PI3 a PI4 pokrývají zbylé $= w \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot x \cdot \bar{z} + w \cdot x \cdot z$ vrcholy úplně

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				⊗	⊗		⊗	⊗	
PI2	×		×	⋮			⋮	⋮	
PI3	⊗		⋮	⋮		⊗	⋮		
PI4		⊗	⊗	⋮		⋮	⋮	⋮	
PI5		×		⋮		⋮	×		
PI6				×		×		⋮	
PI7								×	⊗

- Vhodným postupem najdi všechny zkrácené implikanty – např. pomocí Karnaughovy mapy či Quine – McCluskey
- Např. pomocí mřížky implikantů nalezni všechny nesporné implikanty
- Pro zbývající zkrácené implikanty napiš normální konjunktvní formou logický výraz, reprezentující všechna možná pokrytí následovně:
 - Pro každý nepokrytý vrchol запиš výraz – sumu zkrácených implikantů, které jej pokrývají
 - Výsledné sumy запиš jako součin – vznikne konjunktvní forma
- Vzniklý zápis v konjunktvní formě
 - Přepiš na disjunktvní zápis prostým roznásobením
 - Zjednoduš pomocí teorémů Booleovy algebry
 - Každý vzniklý term představuje jedno možné pokrytí
- Nalezni pokrytí s nejnižší cenou
 - Cenou rozumíme počet zkrácených implikantů a počet proměnných v každém zkráceném implikantu

- Funkce umožňuje nalezení optimálního řešení, ale její složitost narůstá s počtem zkrácených implikantů
- Příklad
 - Zkrácené implikanty $PI1=(8,9,12,13)$, $PI2=(2,6)$, $PI3=(2,10)$, $PI4=(4,6)$, $PI5=(4,12)$, $PI6=(8,10)$, a $PI7=(13,15)$
 - Nalezneme nesporné implikanty – $PI1=(8,9,12,13)$ a $PI7=(13,15)$

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				⊗	⊗		⊗	⊗	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								⊗	⊗

- Příklad
 - Mřížku přepíšeme bez nesporných implikantů
 - Pro každý nepokrytý implikant zapíšeme sumu zkrácených implikantů, které jej pokrývají a výsledné sumy zapíšeme jako součin – vznikne konjunktivní forma

	2	4	6	10
PI2	x		x	
PI3	x			x
PI4		x	x	
PI5		x		
PI6				x

$$C = (PI2 + PI3) \cdot (PI4 + PI5) \cdot (PI2 + PI4) \cdot (PI3 + PI6)$$

- Přepíšeme na disjunktivní formu a zjednodušíme

$$C = PI2 \cdot PI3 \cdot PI5 + PI3 \cdot PI4 + PI2 \cdot PI4 \cdot PI6 + PI2 \cdot PI5 \cdot PI6$$

- Vybereme pokrytí s nejnižší cenou (nejméně implikantů)

$$C_{\min} = PI3 \cdot PI4$$